CENTRO ESTADUAL DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL DE CURITIBA – C.E.E.P CURITIBA

APOSTILA DE MATEMÁTICA BÁSICA PARA E.J.A.

Modalidades: Integrado
Subseqüente
Proeja

Autor: Ronald Wykrota (wykrota@uol.com.br)

Curitiba - Paraná

2012

CENTRO ESTADUAL DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL DE CURITIBA – CURITIBA - PARANÁ
DISCIPLINA: FISICA - Professor: Ronald Wykrota (wykrota@uol.com.br)
REVISÃO DE MATEMÁTICA BÁSICA PARA E.J.A.

EXPRESSÕES NUMÉRICAS:

São as expressões matemáticas que envolvem as operações matemáticas básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão), podendo envolver simultaneamente essas quatro operações numa única ***expressão numérica***.

Como maneira de separar e também organizar as expressões numéricas, é comum utilizar símbolos matemáticos para separar partes da equação ou mesmo para evidenciar que uma determinada operação matemática deve ser realizada antes que outra. Os símbolos utilizados para esse fim são: parênteses → **( )**, colchetes → **[ ]** e chaves → **{ }**.

Para resolver essas expressões, deve-se obedecer a uma ordem de resolução, tanto das operações matemáticas básicas como dos símbolos matemáticos. Essa ordem é indicada abaixo:

Símbolos:
- deve ser obedecida a seguinte ordem de resolução: primeiro → parênteses → ( )
depois → colchetes → [ ]
depois → chaves → { }

Operações Matemáticas:
- devem ser resolvidas obedecendo a seguinte ordem: primeiro → multiplicação e divisão
depois → soma e subtração

EXEMPLOS:

1) Resolva as Expressões Numéricas abaixo:

a) 13 + [33 – (11 + 3) + 3] =

Primeiramente, devemos resolver a operação que está dentro dos Parênteses:
(11 + 3) = 14
→ Assim, temos:
13 + [33 – (**14**) + 3] =
= 13 + [33 – 14 + 3]
→ Já resolvemos os Parênteses. Agora, vamos resolver os Colchetes, Assim, temos:
= 13 + **[22]** →
Finalizando, temos:
= 13 + 22
= 35

ATENÇÃO: A resolução apresentada acima foi feita em partes para o aluno entender cada uma das etapas da resolução. Matematicamente, a resolução formal dessa expressão é apresentada a seguir:

13 + [33 – (11 + 3) + 3] = 13 + [33 – 14 + 3] = 13 + 22 = **35** → ***<u>35 é a resposta da expressão numérica apresentada.</u>***

b) 4 + { (4 + 2) + [10 + (4 + 4 + 8)] + 3 } =

Primeiramente, devemos resolver as operações que estão dentro dos Parênteses:
(4 + 2) = 6 e (4 + 4 + 8) = 16
→ Assim, temos:
4 + { **6** + [10 + **16**] + 3 } =
→ Já resolvemos os Parênteses. Agora, vamos resolver os Colchetes. Assim, temos:
= 4 + { 6 + **26** + 3 } ↓
→ Agora vamos resolver as chaves:
= 4 + { **35** } = 4 + 35 = **39**

ATENÇÃO: A resolução apresentada acima foi feita em partes para o aluno entender cada uma das etapas da resolução. Matematicamente, a resolução formal dessa expressão é apresentada a seguir:

4 + { (4 + 2) + [10 + (4 + 4 + 8)] + 3 } = 4 + { 6 + [10 + 16] + 3 = 4 + { 6 + 26 + 3 } = 4 + 35 = **39** → ***<u>39 é a resposta da expressão numérica apresentada.</u>***

c) [(18 + 3 x 2) ÷ 8 + 5 x 3] ÷ 6 =

Primeiramente, devemos resolver as operações que estão dentro dos parênteses. Além disso, devemos resolver primeiro a multiplicação e depois a soma. Assim, temos:
(18 + 3 x 2) = (18 + 6) = 24
→ Agora, temos:
= [**24** ÷ 8 + 5 x 3] ÷ 6
→ Já resolvemos os Parênteses. Agora, vamos resolver os Colchetes. Além disso, devemos resolver primeiro a multiplicacão e depois a divisão. Assim:
= [24 ÷ 8 + 5 x 3] ÷ 6
= [24 ÷ 8 + 15] ÷ 6
= [3 + 15] ÷ 6
→ Finalizando, temos:
= 18 ÷ 6
= **3**

ATENÇÃO: A resolução apresentada acima foi feita em partes para o aluno entender cada uma das etapas da resolução. Matematicamente, a resolução formal dessa expressão é apresentada a seguir:

= [(18 + 3 x 2) ÷ 8 + 5 x 3] ÷ 6 = [(18 + 6) ÷ 8 + 5 x 3] ÷ 6 = [(24) ÷ 8 + 5 x 3] ÷ 6 = [24 ÷ 8 + 5 x 3] ÷ 6 = [3 + 15] ÷ 6 = 18 ÷ 6 = **3**
→ **3** ***<u>é a resposta da expressão numérica apresentada.</u>***

EXERCÍCIOS:

1) Resolva as expressões numéricas abaixo:

a) $80 + \{ 5 + [(8 + 12) + (13 + 12)] + 10 \} =$

$\boxed{= 140}$

b) $58 + [48 – (31 – 10) + 15] =$

$\boxed{= 100}$

c) $38 – \{ (51 – 15) + [5 + (3 – 1)] – 10 \} =$

$\boxed{= 5}$

d) $[9 + (585 – 15 \times 6)] \div 56 =$

$\boxed{= 9}$

e) $[30 – (17 – 8) \times 3 + 25] \div 7 =$

$\boxed{= 4}$

f) $\{ [(8 \times 4 + 3) \div 7 + (3 + 15 \div 5) \times 3] \times 2 – (19 – 7) \div 6 \} \times 2 + 12 =$

$\boxed{= 100}$

g) $\{ [(6 \times 4 \times 7) \div 3 + 9] \div 5 \} \times 13 =$

$\boxed{= 169}$

POTENCIAÇÃO:

Seja: $\mathbf{A^N}$

Podemos ler a Potência apresentada acima como sendo um número qualquer A, elevado a Potência N. Essa representação matemática indica que vamos multiplicar o número A, N vezes.

Para facilitar o entendimento, vamos utilizar exemplos numéricos:

I) 3^4 → lê-se três elevado a quarta potência (ou ainda três elevado a potência 4). Isto significa que vamos multiplicar o número três, quatro vezes (consecutivas). Matematicamente, temos:

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

II) 4^5 → lê-se quatro elevado a quinta potência (ou ainda quatro elevado a potência 5). Isto significa que vamos multiplicar o número 4, cinco vezes (consecutivas). Matematicamente, temos:

$4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$

__ATENÇÃO: por definição, considera-se que qualquer número elevado a potência zero é igual a 1. Também, o número um elevado a qualquer potência será sempre igual a 1.__

__EXEMPLOS:__

1) Calcule o valor numérico das potências apresentadas abaixo:

a) $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ **= 32**

b) $4^2 = 4 \times 4$ **= 16**

c) $10^3 = 10 \times 10 \times 10$ **= 1000**

d) $12^4 = 12 \times 12 \times 12 \times 12$ **= 20736**

e) 13^0 **= 1**

__EXERCÍCIOS:__

1) Calcule o valor numérico das potências apresentadas abaixo:

a) $1^7 =$ **= 1**

b) $2^6 =$ **= 64**

c) $4^5 =$ **= 1024**

d) $15^0 =$ **= 1**

e) $13^2 =$ **= 169**

f) $10^6 =$ **= 1000000**

g) $15^3 =$ **= 3375**

h) $100^2 =$ **= 10000**

i) $5^6 =$ **= 15625**

j) $2^{10} =$ **= 1024**

k) $50^0 =$ **= 1**

l) $450^0 =$ **= 1**

__ATENÇÃO: como a Potenciação é, basicamente, um produto de números, se uma Potência aparecer numa Expressão Numérica, ela deverá ser resolvida por primeiro. Depois, observam-se as regras já apresentadas.__

__EXEMPLOS:__

1) Resolva as Expressões numéricas indicadas abaixo:

a) $25 + 5 \times 3^2 - 6^2 + 2^5 =$

Como nessa Expressão Numérica existem Potências, devemos começar a resolução por elas. Assim:
$3^2 = 9$; $6^2 = 36$; $2^5 = 32$

→ Assim, a Expressão Numérica fica:
$= 25 + 5 \times 3^2 - 6^2 + 2^5$
$= 25 + 5 \times$ **9** – **36** + **32**

→ Resolvendo a Expressão, temos:
$= 25 + 5 \times 9 - 36 + 32$
$= 25 + 45 - 36 + 32$
= 66

ATENÇÃO: A resolução apresentada acima foi feita em partes para o aluno entender cada uma das etapas da resolução. Matematicamente, a resolução formal dessa expressão é apresentada a seguir:

$25 + 5 \times 3^2 - 6^2 + 2^5 = 25 + 5 \times$ **9** – **36** + **32** = 25 + 45 – 36 + 32 **= 66 → 66** ***__é a resposta da expressão numérica apresentada.__***

b) $5^3 - 4 \times [\ 16 + (2^3 - 3\ ) \times 2\ ] =$

Como nessa Expressão Numérica existem Potências, devemos começar a resolução por elas. Assim:
$5^3 = 125$; $2^3 = 8$

→ Assim, a Expressão Numérica fica:
$= 5^3 - 4 \times [\ 16 + (2^3 - 3\ ) \times 2\ ]$
$= \mathbf{125} - 4 \times [\ 16 + (\mathbf{8} - 3\ ) \times 2\ ]$

→ Resolvendo a Expressão, temos:
$= 125 - 4 \times [\ 16 + (8 - 3\ ) \times 2\ ]$
$= 125 - 4 \times [\ 16 + 5 \times 2\ ]$
$= 125 - 4 \times [\ 16 + 10\ ]$
$= 125 - 4 \times 26$
$= 125 - 104$
= 21

ATENÇÃO: A resolução apresentada acima foi feita em partes para o aluno entender cada uma das etapas da resolução. Matematicamente, a resolução formal dessa expressão é apresentada a seguir:
$5^3 - 4 \times [\ 16 + (2^3 - 3\ ) \times 2\ ] = 125 - 4 \times [\ 16 + (8 - 3\ ) \times 2\ ] = 125 - 4 \times [\ 16 + 5 \times 2\ ] = 125 - 4 \times [\ 16 + 10\ ] = 125 - 4 \times 26 = 125 - 104 =$

= 21 → 21 _é a resposta da expressão numérica apresentada._

EXERCÍCIOS:

1) Resolva as Expressões Numéricas abaixo:

a) $3^3 - 2 \times [\ 3^2 + (4^2 - 5\ ) \times 3\ ] =$

= - 57

b) $40 + \{\ 3 + [\ (\ 2^3 + 12\ ) + (\ 13 + 2^2 \times 3\ )] + 5\ \} =$

= 93

c) $\{\ 2^5 - [\ 5 + (3 \times 7 - 4)\ ]\ \} \div 5 + 3^2 \times 2 - (\ 8^2 - 60\ ) \times 5 =$

= 0

d) $\{\ [\ (\ 2^3 \times 2^2 + 3\ ) \div 7 + (\ 3 + 15 \div 5\ ) \times 3\ ] \times 2 - (\ 19 - 7\ ) \div 6\ \} \times 2 + 2^2 \times 3 =$

= 100

e) $\{\ [\ (\ 3^2 \times 2^2 \times 7\ ) \div 3 + 6\ ] \div 5\ \} \times 3 \times 2^2 =$

= 216

f) $\{\ [\ (\ 2^2 \times 4^2 \times 5\ ) \div 4 + 10\ ] \div 3\} \times 3 \times 2^2 =$

= 360

NÚMEROS PRIMOS:

Por definição, chamamos de Números Primos a todos os números que são divisíveis apenas por si e pelo número 1.

Um número é chamado de divisível por outro número quando o resto da divisão dos dois números em questão seja igual a zero. Analise os exemplos a seguir:

1) Vamos verificar se o número 10 é divisível por 2:

10 | 2
0   5

Zero é resto da divisão de 10 por 2

→ **Como o resto da divisão de 10 por dois é igual a zero, dizemos que o número dez _é divisível_ por dois.**

2) Vamos verificar se o número 30 é divisível por 2:

```
 30 |2
- 2  15
 10
-10
  0
```

→ **Como o resto da divisão de 30 por dois é igual a zero, dizemos que o número trinta *é divisível* por dois.**

Zero é resto da divisão de 30 por 15

3) Vamos verificar se o número 40 é divisível por 3:

```
 40 |3
- 3  13
 10
- 9
  1
```

→ **Como o resto da divisão de 40 por três é igual a um (que é diferente de zero), dizemos que o número quarenta *não é divisível* por três.**

Um é resto da divisão de 40 por 3

FATORAÇÃO DE UM NÚMERO:

A fatoração de um número tem por objetivo encontrar todos os números primos que, se multiplicados entre si, nos fornecem como resultado o número em questão. Para entender melhor, analise os exemplos apresentados abaixo.

EXEMPLOS:

1) Decomponha em fatores primos os números indicados abaixo:

a) 210

Para decompor um número em fatores primos, devemos escrever o número e traçar uma linha ao seu lado direito. Depois vamos dividir o número sucessivamente por dois, por três, por quatro e assim sucessivamente. →

÷	
210	2
105	3 → 105 não é divisível por 2. Assim, devemos utilizar o próximo número (3).
35	5 → 35 não é divisível por 3. Assim, devemos utilizar o próximo número (4). Como 35 também não é divisível por 4, usaremos o próximo número (5).
7	7
1	

2.3.5.7 = 210 ↓

Assim, fatorando o número 210, obtemos os números primos 2, 3, 5, e 7 que, se multiplicados entre si, nos fornecem o número que tínhamos anteriormente (210).

b) 432

Para decompor um número em fatores primos, devemos escrever o número e traçar uma linha ao seu lado direito. Depois vamos dividir o número sucessivamente por dois, por três, por quatro e assim sucessivamente. →

÷	
432	2
216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$2.2.2.2.3.3.3 = 2^4 \cdot 3^3 = 432$ ↓

Assim, fatorando o número 432, obtemos os números primos 2 e 3. Como eles aparecem mais de uma vez, vamos escrevê-los na forma de Potência e vamos multiplicá-los entre si, para obter o número que tínhamos anteriormente (432).

c) 1224

Para decompor um número em fatores primos, devemos escrever o número e traçar uma linha ao seu lado direito. Depois vamos dividir o número sucessivamente por dois, por três, por quatro e assim sucessivamente. →

÷	
1224	2
612	2
306	2
153	3
51	3
17	17
1	
1	

$2.2.2..3.3.17 = 2^3 \cdot 3^2 .17= 1224$ ↓

Assim, fatorando o número 1224, obtemos os números primos 2, 3 e 17. Como alguns deles aparecem mais de uma vez, vamos escrevê-los na forma de Potência e vamos multiplicá-los entre si, para obter o número que tínhamos anteriormente (1224).

EXERCÍCIOS:

1) Decomponha em fatores primos os números indicados abaixo:

a) 3780

$= 2^2 . 3^3 . 5 . 7$

b) 630

$= 2 . 3^2 . 5 . 7$

c) 504

$= 2^3 . 3^2 . 7$

d) 280

$= 2^3 . 5 . 7$

e) 6744

$= 2^3 . 3 . 281$

f) 4648

$= 2^3 . 7 . 83$

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM: M.M.C.

Obter o Mínimo Múltiplo Comum entre dois ou mais números quaisquer (A e B, por exemplo) significa que vamos procurar um outro número, que terá o menor valor possível e será múltiplo simultaneamente do número A e do número B.

O M.M.C. entre dois ou mais números é obtido através da utilização do método apresentado abaixo.

EXEMPLOS:

1) Determinar o Mínimo Múltiplo Comum entre os números:

a) 6, 8 e 12

Para obtermos o M.M.C. entre dois ou mais números, vamos escrevê-los em ordem crescente e separá-los por vírgulas. Vamos começar dividindo todos os números por dois, depois por três e assim sucessivamente.]
Se algum dos números não for divisível pelo número considerado, ele deverá apenas ser repetido. →

÷

Três não é divisível por dois. Então vamos repetir. ←

6 , 8 , 12	2
3 , 4 , 6	2
3 , 2 , 3	2
3 , 1 , 3	3
1 , 1 , 1	$2 . 2 . 2 . 3 = 2^3 . 3 =$ **24**

↓

Assim, 24 é o Mínimo Múltiplo Comum entre 6, 8 e 12.

b) 18, 20, 45 e 60

Para obtermos o M.M.C. entre dois ou mais números, vamos escrevê-los em ordem crescente e separá-los por vírgulas. Vamos começar dividindo todos os números por dois, depois por três e assim sucessivamente.]
Se algum dos números não for divisível pelo número considerado, ele deverá apenas ser repetido. →

÷

45 não é divisível por dois. Então vamos repetir. ←

18 , 20 , 45 , 60	2
9 , 10 , 45 , 30	2
9 , 5 , 45 , 15	3
3 , 5 , 15 , 5	3
1 , 5 , 5 , 5	5
1 , 1 , 1 , 1	$2 . 2 . 3 . 3 . 5 = 2^2 . 3^2 . 5 =$ **180**

↓

Assim, 180 é o Mínimo Múltiplo Comum entre 18, 20, 45 e 60.

c) 18, 35, 45 e 120

Para obtermos o M.M.C. entre dois ou mais números, vamos escrevê-los em ordem crescente e separá-los por vírgulas. Vamos começar dividindo todos os números por dois, depois por três e assim sucessivamente.]
Se algum dos números não for divisível pelo número considerado, ele deverá apenas ser repetido.

→

35 não é divisível nem por dois, nem por três. Então vamos repetir.

	÷
18 , 35 , 45 , 120	2
9 , 35 , 45 , 60	2
9 , 35 , 45 , 30	2
9 , 35 , 45 , 15	3
3 , 35 , 15 , 5	3
1 , 35 , 5 , 5	5
1 , 7 , 1 , 1	7
1 , 1 , 1 , 1	$2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 7 = 2^2 . 3^2 . 5 =$ **2520**

45 não é divisível por dois. Então vamos repetir.

↓

Assim, 2520 é o Mínimo Múltiplo Comum entre 18, 35, 45 e 120.

<u>EXERCÍCIOS :</u>

1) Determine o Mínimo Múltiplo Comum entre os números:

a) 10, 12 e 45

= 180

b) 5, 15 e 18

= 90

c) 16 e 70

= 560

d) 30, 40 e 180

= 360

e) 30, 150 e 200

= 600

f) 16, 25 e 42

= 8400

SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÕES:

Simplificar uma fração numérica significa que vamos achar fatores comuns ao numerador e ao denominador da fração. Esses números, como estarão multiplicando e dividindo a fração simultaneamente, poderão ser cancelados matematicamente, tornando a fração mais simples (*por isso o termo simplificação*) para a sua resolução. Para entender esse processo, analise os exemplos abaixo.

EXEMPLOS:

1) Simplifique matematicamente as frações numéricas apresentadas abaixo:

a) $\frac{60}{90} =$

Para simplificar uma fração numérica, podemos decompor o numerador e o denominador da fração em números primos. Isso tornará mais visível quais serão os termos poderemos simplificar. →

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \\ \hline & 2.2.3.5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \\ \hline & 2.3.3.5 \end{array}$$

→ Agora vamos escrever novamente a fração, substituindo o numerador e o denominador pelos seus fatores primos. ↓

→ $\frac{60}{90} = \frac{2.2.3.5}{2.3.3.5}$ → Podemos agora simplificar os termos comuns ao numerador e ao denominador, que são: 2, 3 e 5. Assim, temos: → $= \frac{\cancel{2}.2.\cancel{3}.\cancel{5}}{\cancel{2}.3.\cancel{3}.\cancel{5}}$ → $\boxed{\frac{2}{3}}$

***ATENÇÃO:* note que o fato de simplificarmos a fração não pode causar nenhuma alteração no seu valor numérico, ou seja: - se dividirmos 90 por 60, temos por resultado:** $60 \div 90 = 0{,}666666666667$
- se dividirmos 2 por 3, temos por resultado: $2 \div 3 = 0{,}666666666667$

b) $\frac{12}{45} =$

Para simplificar uma fração numérica, podemos decompor o numerador e o denominador da fração em números primos. Isso tornará mais visível quais serão os termos poderemos simplificar. →

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \\ \hline & 2.2.3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \\ \hline & 3.3.5 \end{array}$$

→ Agora vamos escrever novamente a fração, substituindo o numerador e o denominador pelos seus fatores primos. ↓

→ $\frac{12}{45} = \frac{2.2.3}{3.3.5}$ → Podemos agora simplificar o termo comum ao numerador e ao denominador, que é: 3. Assim, temos: → $= \frac{2.2.\cancel{3}}{3.\cancel{3}.5}$ → $\frac{2.2}{3.5} = \boxed{\frac{4}{15}}$

***ATENÇÃO:* note que o fato de simplificarmos a fração não pode causar nenhuma alteração no seu valor numérico, ou seja: - se dividirmos 12 por 45, temos por resultado:** $12 \div 45 = 0{,}2666666666667$
- se dividirmos 4 por 15, temos por resultado: $4 \div 15 = 0{,}2666666666667$

c) $\frac{60}{50} =$

Para simplificar uma fração numérica, podemos decompor o numerador e o denominador da fração em números primos. Isso tornará mais visível quais serão os termos poderemos simplificar. →

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \\ \hline & 2.2.3.5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \\ \hline & 2.5.5 \end{array}$$

→ Agora vamos escrever novamente a fração, substituindo o numerador e o denominador pelos seus fatores primos. ↓

→ $\frac{60}{50} = \frac{2.2.3.5}{2.5.5}$ → Podemos agora simplificar os termos comuns ao numerador e ao denominador, que são: 2, e 5. Assim, temos: → $= \frac{\cancel{2}.2.3.\cancel{5}}{\cancel{2}.5.\cancel{5}}$ → $\frac{2.3}{5} = \boxed{\frac{6}{5}}$

***ATENÇÃO:* note que o fato de simplificarmos a fração não pode causar nenhuma alteração no seu valor numérico, ou seja: - se dividirmos 60 por 50, temos por resultado:** $60 \div 50 = 1{,}2$
- se dividirmos 6 por 5, temos por resultado: $6 \div 5 = 1{,}2$

EXERCÍCIOS:

1) Simplifique matematicamente as frações numéricas apresentadas abaixo:

a) $\frac{15}{21} =$ $\boxed{\frac{5}{7}}$

b) $\frac{90}{60} =$ $\boxed{\frac{3}{2}}$

c) $\frac{140}{182} =$ $\boxed{\frac{10}{13}}$

d) $\frac{280}{350} =$ $\boxed{\frac{4}{5}}$

e) $\frac{468}{780} =$ $\boxed{\frac{3}{5}}$

f) $\frac{182}{140} =$ $\boxed{\frac{13}{10}}$

g) $\frac{390}{234} =$ $\boxed{\frac{5}{3}}$

REGRA DE SINAIS:

Durante a resolução de operações matemáticas em geral, é comum multiplicarmos (ou dividirmos) um número positivo por um número negativo e vice-versa.

Para efetuarmos essas operações corretamente, devemos sempre levar em consideração a **Regra de Sinais**:

Multiplicação:

Sinal (+) vezes sinal (+) = +

Sinal (-) vezes sinal (-) = +

Sinal (+) vezes sinal (-) = -

Sinal (-) vezes sinal (+) = -

Divisão:

Sinal (+) dividido por sinal (+) = +

Sinal (+) dividido por sinal (-) = -

Sinal (-) dividido por sinal (+) = -

Sinal (-) dividido por sinal (-) = +

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO:

1) Efetue:

a) $\frac{-4}{-3} =$ Neste caso o sinal negativo pode ser simplificado ou podemos utilizar a regra de sinais: **Sinal (-) dividido por sinal (-) = +** → $\frac{-4}{-3} = \boxed{\frac{4}{3}}$

b) 3 x (-2) x 7 = Neste caso, vamos multiplicar cada um dos dois primeiros sinais entre si e o resultado será multiplicado pelo terceiro sinal: **+ vezes - = -**
- vezes + = - → = - (3 x 2 x 7) = $\boxed{-42}$

OPERAÇÕES COM FRAÇÕES:

É bastante comum precisarmos somar, subtrair, multiplicar ou dividir números apresentados na forma de frações.

Para entender como proceder em cada uma dessas operações matemáticas analisemos os exemplos abaixo.

SOMA (ou Adição) E SUBTRAÇÃO (ou diferença) DE FRAÇÕES:

EXEMPLOS:

1) Efetue a soma das frações indicadas abaixo:

a) $\frac{3}{2} + \frac{4}{3} =$

Para efetuarmos a soma de frações, primeiramente devemos tirar o Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C.) entre os denominadores de cada uma das frações. No caso, vamos tirar o M.M.C. entre 2 e 3. →

2 , 3	2
1 , 3	3
1 , 1	2 . 3 = **6**

→ O M.M.C. entre 2 e 3 é **6**. ↓

→ Agora vamos escrever o M.M.C. no denominador da fração. Esse denominador será comum às duas frações. Assim, temos:

$$\frac{3}{2} + \frac{4}{3} = \frac{}{6}$$

→ Agora vamos dividir, separadamente, o M.M.C. (que neste caso é 6) pelo denominador de cada uma das frações e o resultado da divisão vamos multiplicar pelo numerador da fração. O resultado dessa operação será escrito no numerador da nova fração, ***repetindo os sinais***. Assim, temos:

$$\frac{3}{2} + \frac{4}{3} = \frac{3.3 + 2.4}{6}$$

x ÷

→ Agora basta efetuarmos as operações indicadas e, se for possível, simplificar os resultados. Feito isso, já obtivemos o resultado da soma das duas frações.

$$= \frac{9+8}{6} = \frac{17}{6}$$

Assim, o resultado da soma das frações indicadas é : $\mathbf{\frac{17}{6}}$

ATENÇÃO: A resolução apresentada acima foi feita em partes para o aluno entender cada uma das etapas da resolução. Matematicamente, a resolução formal dessa soma de frações é apresentada a seguir:

$$\frac{3}{2} + \frac{4}{3} = \frac{3 . 3 + 2 . 4}{6} = \frac{9+8}{6} = \mathbf{\frac{17}{6}}$$

---

b) $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6} =$

Para efetuarmos a soma de frações, primeiramente devemos tirar o Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C.) entre os denominadores de cada uma das frações. No caso, vamos tirar o M.M.C. entre 3, 4 e 6. →

4 , 3 , 6	2
2 , 3 , 3	2
1 , 3 , 3	3
1 , 1 , 1	2 . 2. 3 = **12**

→ O M.M.C. entre 4, 3 e 6 é **12**. ↓

→ Agora vamos escrever o M.M.C. no denominador da fração. Esse denominador será comum às duas frações. Assim, temos:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{}{12}$$

→ Agora vamos dividir, separadamente, o M.M.C. (que neste caso é 12) pelo denominador de cada uma das frações e o resultado da divisão vamos multiplicar pelo numerador da fração. O resultado dessa operação será escrito no numerador da nova fração, ***repetindo os sinais***. Assim, temos:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{9+4+10}{12}$$

x ÷

→ Agora basta efetuarmos as operações indicadas e, se for possível, simplificar os resultados. Feito isso, já obtivemos o resultado da soma das duas frações.

$$= \frac{9+4+10}{12} = \frac{23}{12}$$

Assim, o resultado da soma das frações indicadas é : $\mathbf{\frac{23}{12}}$

ATENÇÃO: A resolução apresentada acima foi feita em partes para o aluno entender cada uma das etapas da resolução. Matematicamente, a resolução formal dessa soma de frações é apresentada a seguir:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{3 . 3 + 4 . 1 + 2 . 5}{12} = \frac{9+4+10}{12} = \mathbf{\frac{23}{12}}$$

---

c) $\frac{5}{8} + \frac{3}{8} - \frac{4}{8} =$

Para efetuarmos a soma de frações, primeiramente devemos tirar o Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C.) entre os denominadores de cada uma das frações. Neste caso, ***como todos os denominadores são iguais entre si*** (8), não há necessidade de se calcular o M.M.C., uma vez que ele será igual ao denominador. Assim, basta somarmos os numeradores da fração e repetirmos o denominador. →

Assim, temos:

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} - \frac{4}{8} = \frac{5+3-4}{8} = \frac{4}{8} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

Simplificando

d) $\frac{1}{2} + 3 - \frac{4}{5} =$

Para efetuarmos a soma de frações, primeiramente devemos tirar o Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C.) entre os denominadores de cada uma das frações. Neste caso, ***um dos números envolvidos na soma aparentemente não apresenta denominador. Porém, apesar de não estar escrito, o número 3 possui denominador igual a um (1)***.
Nesse caso, não há necessidade do número 1 participar do M.M.C. e, portanto, vamos apenas considerar o M.M.C. entre os números 2 e 5.

→

$$\begin{array}{r|l} 2\ ,\ 5 & 2 \\ 1\ ,\ 5 & 5 \\ \hline 1\ ,\ 1 & 2 \cdot 5 = 10 \end{array}$$

→ O M.M.C. entre 2 e 5 é **10.**

→ Agora vamos escrever o M.M.C. no denominador da fração. Esse denominador será comum às três frações. Assim, temos:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{1} - \frac{4}{5} = \frac{\quad\quad}{10}$$

→ Agora vamos dividir, separadamente, o M.M.C. (que neste caso é 10) pelo denominador de cada uma das frações e o resultado da divisão vamos multiplicar pelo numerador da fração. O resultado dessa operação será escrito no numerador da nova fração, ***repetindo os sinais***. Assim, temos:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{1} - \frac{4}{5} = \frac{5+30-8}{10}$$

x ÷

→ Agora basta efetuarmos as operações indicadas e, se for possível, simplificar os resultados. Feito isso, já obtivemos o resultado da soma das duas frações.

$$= \frac{5 + 30 - 8}{10} = \frac{27}{10}$$

Assim, o resultado da soma das frações indicadas é : $\mathbf{\frac{27}{10}}$

ATENÇÃO: A resolução apresentada acima foi feita em partes para o aluno entender cada uma das etapas da resolução. Matematicamente, a resolução formal dessa soma de frações é apresentada a seguir:

$$\frac{1}{2} + 3 - \frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 1 + 10 \cdot 3 - 2 \cdot 4}{10} = \frac{5 + 30 - 8}{10} = \mathbf{\frac{27}{10}}$$

EXERCÍCIOS:

1) Efetue:

a) $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} =$ $\boxed{\frac{5}{7}}$

b) $\frac{5}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} =$ $\boxed{\frac{3}{2}}$

c) $\frac{1}{2} + 3 + \frac{4}{5} =$ $\boxed{\frac{43}{10}}$

d) $\frac{17}{5} - \frac{7}{4} + \frac{3}{10} =$ $\boxed{\frac{39}{20}}$

e) $\frac{7}{3} + \frac{25}{7} =$ $\boxed{\frac{124}{21}}$

f) $\frac{13}{4} + 2 + \frac{7}{5} =$ $\boxed{\frac{133}{20}}$

g) $\frac{17}{5} - \frac{1}{3} =$ $\boxed{\frac{46}{15}}$

h) $5 - \frac{1}{3} =$ $\boxed{\frac{14}{3}}$

i) $\frac{23}{6} + \frac{19}{12} + \frac{79}{18} + \frac{11}{3} =$ $\boxed{\frac{485}{36}}$

j) $\frac{23}{6} - \frac{19}{12} + \frac{79}{18} - \frac{11}{3} =$ $\boxed{\frac{107}{36}}$

k) $\frac{9}{4} + \frac{7}{4} - \frac{20}{4} =$ $\boxed{-1}$

l) $\frac{13}{3} - \frac{3}{3} + \frac{5}{3} =$ $\boxed{5}$

MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES:

Para multiplicarmos duas ou mais frações numéricas, os numeradores devem ser multiplicados entre si e os denominadores também devem ser multiplicados entre si. Os resultados do numerador e do denominador devem ser simplificados sempre que for possível.

Para entender melhor, vamos analisar os exemplos abaixo.

EXEMPLOS:

1) Efetue:

a) $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} =$

Para efetuarmos a multiplicação de frações, multiplicam-se os numeradores entre si. Esse resultado será o numerador da fração.
O denominador da fração também é obtido através da multiplicação dos denominadores entre si.

→ Assim, temos:

$\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{3 \times 4}{5 \times 7} = \boxed{\frac{12}{35}}$ → Esse é o resultado do produto entre as frações

---

b) $\frac{4}{15} \times \frac{20}{7} =$

Para efetuarmos a multiplicação de frações, multiplicam-se os numeradores entre si. Esse resultado será o numerador da fração.
O denominador da fração também é obtido através da multiplicação dos denominadores entre si.

→ Assim, temos:

$\frac{4}{15} \times \frac{20}{7} = \frac{4 \times 20}{15 \times 7} = \frac{80}{105} = \boxed{\frac{16}{21}}$

Simplificando por 5

---

c) $\frac{2}{3} \times \frac{9}{5} \times \frac{15}{4} =$

Para efetuarmos a multiplicação de frações, multiplicam-se os numeradores entre si. Esse resultado será o numerador da fração.
O denominador da fração também é obtido através da multiplicação dos denominadores entre si.

→ Assim, temos:

$\frac{2}{3} \times \frac{9}{5} \times \frac{15}{4} = \frac{2 \times 9 \times 15}{3 \times 5 \times 4} = \frac{270}{60} = \frac{9}{2}$

Simplificando por 30

<u>ATENÇÃO: as simplificações possíveis podem ser feitas mesmo antes de realizarmos o produto. Fazer as simplificações possíveis antes ou depois de realizar o produto entre os números não altera o resultado que deve ser obtido. Para o exemplo anterior, se fizéssemos as simplificações antes das multiplicações, teríamos:</u>

$\frac{2}{3} \times \frac{9}{5} \times \frac{15}{4} =$ ↓

$\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3} \times 3}{\cancel{5}} \times \frac{3 \times \cancel{5}}{\cancel{2} \times 2} = \frac{1 \times 1 \times 3 \times 3 \times 1}{1 \times 1 \times 1 \times 2} = \boxed{\frac{9}{2}}$

d) $10 \times \frac{2}{5} =$

Para efetuarmos a multiplicação de frações, multiplicam-se os numeradores entre si. Esse resultado será o numerador da fração.
O denominador da fração também é obtido através da multiplicação dos denominadores entre si.

→

O número 10 aparentemente não está representado na forma de uma fração. Porém, todo número inteiro pode ser entendido como uma fração cujo denominador é igual a 1.

→ Assim, temos:

$$\frac{10}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{10 \times 2}{1 \times 5} = \frac{20}{5} = \boxed{4}$$

EXERCÍCIOS:

1) Efetue:

a) $\frac{5}{3} \times \frac{18}{7} =$ $\boxed{\frac{30}{7}}$

b) $\frac{13}{5} \times \frac{5}{3} =$ $\boxed{\frac{13}{3}}$

c) $\frac{4}{9} \times \frac{18}{36} \times \frac{5}{8} =$ $\boxed{\frac{5}{36}}$

d) $\frac{3}{8} \times \frac{16}{27} \times \frac{9}{10} =$ $\boxed{\frac{1}{5}}$

e) $\frac{5}{6} \times \frac{12}{25} \times \frac{5}{4} \times \frac{2}{3} =$ $\boxed{\frac{1}{3}}$

f) $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} \times \frac{6}{7} \times \frac{7}{6} =$ $\boxed{1}$

g) $\frac{9}{5} \times \frac{12}{9} \times \frac{5}{12} =$ $\boxed{1}$

h) $\frac{4}{7} \times \frac{5}{3} \times 12 =$ $\boxed{\frac{80}{21}}$

i) $\frac{9}{5} \times 4 \times \frac{36}{7} \times \frac{11}{13} =$ $\boxed{\frac{14256}{455}}$

DIVISÃO DE FRAÇÕES:

Para dividirmos duas frações numéricas, devemos manter a ordem da fração que representa o numerador entre as duas frações e devemos multiplicá-la pelo inverso da fração que se encontra no denominador entre as duas frações.

Na seqüência, devemos realizar normalmente o produto entre as duas frações, ***lembrando sempre de fazer as simplificações possíveis***.

Para entender melhor, vamos analisar os exemplos abaixo.

EXEMPLOS:

1) Efetue:

a) $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} =$

Primeiramente, vamos juntar as duas frações apresentadas e escrevê-las na forma de fração.
No exemplo, 2/3 será o numerador e 5/7 será o denominador da fração.

→ Assim, temos: $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$ →

Agora, vamos manter o numerador da fração (2/3) e vamos multiplicar essa fração pelo inverso da fração que está no denominador (5/7).
Inverso de uma fração significa que vamos inverter o seu numerador com o seu denominador.

→ Assim, temos: $= \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \boxed{\frac{14}{15}}$

ATENÇÃO: A resolução apresentada acima foi feita em partes para o aluno entender cada uma das etapas da resolução. Matematicamente, a resolução formal dessa soma de frações é apresentada a seguir:

$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \boxed{\frac{14}{15}}$ → Resposta

b) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{5} =$

Primeiramente, vamos juntar as duas frações apresentadas e escrevê-las na forma de fração.
No exemplo, 1/2 será o numerador e 3/5 será o denominador da fração.

→ Assim, temos: $\frac{1}{2} \div \frac{3}{5} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}$ →

Agora, vamos manter o numerador da fração (1/2) e vamos multiplicar essa fração pelo inverso da fração que está no denominador (3/5).
Inverso de uma fração significa que vamos inverter o seu numerador com o seu denominador.

→ Assim, temos: $= \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \boxed{\frac{5}{6}}$

ATENÇÃO: A resolução apresentada acima foi feita em partes para o aluno entender cada uma das etapas da resolução. Matematicamente, a resolução formal dessa soma de frações é apresentada a seguir:

$\frac{1}{2} \div \frac{3}{5} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{1 \times 5}{2 \times 3} = \boxed{\frac{5}{6}}$ → Resposta

c) $4 \div \frac{17}{5} =$

Primeiramente, vamos juntar as duas frações apresentadas e escrevê-las na forma de fração.
No exemplo, 4 (que pode ser escrito na forma de fração como 4/1) será o numerador e 17/5 será o denominador da fração.

→ Assim, temos: $\frac{4}{1} \div \frac{17}{5} = \frac{\frac{4}{1}}{\frac{17}{5}}$ →

Agora, vamos manter o numerador da fração (4/1) e vamos multiplicar essa fração pelo inverso da fração que está no denominador (17/5).
Inverso de uma fração significa que vamos inverter o seu numerador com o seu denominador.

→ Assim, temos: $= \frac{4}{1} \times \frac{5}{17} = \boxed{\frac{20}{17}}$

ATENÇÃO: A resolução apresentada acima foi feita em partes para o aluno entender cada uma das etapas da resolução. Matematicamente, a resolução formal dessa soma de frações é apresentada a seguir:

$\frac{4}{1} \div \frac{17}{5} = \frac{\frac{4}{1}}{\frac{17}{5}} = \frac{4}{1} \times \frac{5}{17} = \frac{4 \times 5}{1 \times 17} = \boxed{\frac{20}{17}}$ → Resposta

d) $\frac{19}{6} \div 2 =$

Primeiramente, vamos juntar as duas frações apresentadas e escrevê-las na forma de fração.
No exemplo, 19/6 será o numerador da fração e 2 (que pode ser escrito na forma de fração como 2/1) será o denominador da fração.

→ Assim, temos: $\frac{19}{6} \div \frac{2}{1} = \frac{\frac{19}{6}}{\frac{2}{1}}$ →

Agora, vamos manter o numerador da fração (19/6) e vamos multiplicar essa fração pelo inverso da fração que está no denominador (2/1).
Inverso de uma fração significa que vamos inverter o seu numerador com o seu denominador.

→ Assim, temos: $= \frac{19}{6} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{19}{12}}$

↓

ATENÇÃO: A resolução apresentada acima foi feita em partes para o aluno entender cada uma das etapas da resolução. Matematicamente, a resolução formal dessa soma de frações é apresentada a seguir:

$$\frac{19}{6} \div \frac{2}{1} = \frac{\frac{19}{6}}{\frac{2}{1}} = \frac{19}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{19 \times 1}{6 \times 2} = \boxed{\frac{19}{12}} \rightarrow \text{Resposta}$$

EXERCÍCIOS:

1) Efetue:

a) $4 \div \frac{19}{8} =$ $\boxed{\frac{32}{19}}$

b) $\frac{16}{2} \div 2 =$ $\boxed{4}$

c) $\frac{13}{8} \div \frac{26}{9} =$ $\boxed{\frac{9}{16}}$

d) $\frac{11}{5} \div \frac{11}{4} =$ $\boxed{\frac{4}{5}}$

e) $\frac{7}{2} \div 14 =$ $\boxed{\frac{1}{4}}$

f) $10 \div \frac{5}{8} =$ $\boxed{16}$

g) $\frac{16}{7} \div \frac{1}{3} =$ $\boxed{\frac{48}{7}}$

h) $\frac{1}{4} \div \frac{3}{7} =$ $\boxed{\frac{7}{12}}$

i) $\frac{9}{2} \div \frac{7}{5} =$ $\boxed{\frac{45}{14}}$

OPERAÇÕES COM FRAÇÕES (Continuação):

Conforme já dissemos, é bastante comum precisarmos, somar, subtrair, multiplicar ou dividir duas ou mais frações entre si.

Estudamos separadamente cada uma dessas operações básicas que envolvem frações e agora vamos resolver expressões numéricas que envolvem, simultaneamente, mais de uma operação matemática básica com frações.

RELEMBRANDO:

Para resolver essas expressões, deve-se obedecer a uma ordem na resolução das operações básicas. Essa ordem é indicada abaixo:

Símbolos:
- deve ser obedecida a seguinte ordem de resolução: primeiro → parênteses → ( )
  depois → colchetes → [ ]
  depois → chaves → { }

Operações Matemáticas:
- devem ser resolvidas obedecendo a seguinte ordem: primeiro → multiplicação e divisão
  depois → soma e subtração

REGRA DE SINAIS:

Multiplicação:	***Divisão:***
Sinal (+) vezes sinal (+) = +	Sinal (+) dividido por sinal (+) = +
Sinal (-) vezes sinal (-) = +	Sinal (+) dividido por sinal (-) = -
Sinal (+) vezes sinal (-) = -	Sinal (-) dividido por sinal (+) = -
Sinal (-) vezes sinal (+) = -	Sinal (-) dividido por sinal (-) = +

EXEMPLOS:

1) Resolva as Expressões Numéricas abaixo:

a) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\div\frac{5}{4}=$

Primeiramente, vamos resolver a soma de frações que se encontra dentro os parênteses. Assim, temos:

$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1.3+2.1}{4}=\frac{3+2}{4}=\mathbf{\frac{5}{4}}$

→ Vamos agora substituir os parênteses pelo valor que já calculamos. Assim, temos:

$\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\div\frac{5}{4}=$

$\frac{5}{4}\div\frac{5}{4}=$

→ Agora vamos resolver a divisão de frações. Assim, temos:

$\frac{5}{4}\div\frac{5}{4}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}}=\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{20}{20}=\mathbf{1}$

ATENÇÃO: A resolução apresentada acima foi feita em partes para o aluno entender cada uma das etapas da resolução. Matematicamente, a resolução formal dessa expressão com frações é apresentada a seguir:

$\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\div\frac{5}{4}=\left(\frac{3+2}{4}\right)\div\frac{5}{4}=\frac{5}{4}\div\frac{5}{4}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}}=\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{5\times4}{4\times5}=\frac{20}{20}=\boxed{1}$ → Resposta

---

b) $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)\div\frac{2}{3}=$

Primeiramente, vamos resolver a soma de frações que se encontra dentro os parênteses. Assim, temos:

$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2.2+1.1}{6}=\frac{4+1}{6}=\mathbf{\frac{5}{6}}$

→ Vamos agora substituir os parênteses pelo valor que já calculamos. Assim, temos:

$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)\div\frac{2}{3}=$

$\frac{5}{6}\div\frac{2}{3}=$

→ Agora vamos resolver a divisão de frações. Assim, temos:

Simplificando por 3

$\frac{5}{6}\div\frac{2}{3}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}}=\frac{5}{6}\times\frac{3}{2}=\frac{15}{12}=\mathbf{\frac{5}{4}}$

ATENÇÃO: A resolução apresentada acima foi feita em partes para o aluno entender cada uma das etapas da resolução. Matematicamente, a resolução formal dessa expressão com frações é apresentada a seguir:

$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)\div\frac{2}{3}=\left(\frac{2.2+1.1}{6}\right)=\left(\frac{4+1}{6}\right)\div\frac{2}{3}=\frac{5}{6}\div\frac{2}{3}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}}=\frac{5}{6}\times\frac{3}{2}=\frac{5\times3}{6\times2}=\frac{15}{12}=\boxed{\frac{5}{4}}$ → Resposta

---

c) $\left(\frac{4}{7}-\frac{5}{6}\right)\div\left(\frac{-3}{4}\right)=$

Primeiramente, vamos resolver a subtração de frações que se encontra dentro os parênteses. Assim, temos:

$\frac{4}{7}-\frac{5}{6}=\frac{6.4-7.5}{42}=\frac{24-35}{42}=-\mathbf{\frac{11}{42}}$

→ Vamos agora substituir os parênteses pelo valor que já calculamos. Assim, temos:

$\left(\frac{4}{7}-\frac{5}{6}\right)\div\left(\frac{-3}{4}\right)=$

$\left(\frac{-11}{42}\right)\div\left(\frac{-3}{4}\right)=$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

Agora vamos resolver a divisão de frações. Assim, temos:

$\frac{(-11)}{42}\div\frac{(-3)}{4}=\frac{\frac{-11}{42}}{\frac{-3}{4}}=\frac{(-11)}{42}\times\frac{4}{(-3)}=\frac{(-11)\times4}{42\times(-3)}=\frac{-44}{-126}$ → Simplificando por 2 → $=\boxed{\frac{22}{63}}$ → Resposta

Regra de sinais: **- dividido por - = +**

ATENÇÃO: A resolução apresentada acima foi feita em partes para o aluno entender cada uma das etapas da resolução. Matematicamente, a resolução formal dessa expressão com frações é apresentada a seguir:

$\left(\frac{4}{7}-\frac{5}{6}\right)\div\left(\frac{-3}{4}\right)=\left(\frac{6.4-7.5}{42}\right)\div\left(\frac{-3}{4}\right)=\left(\frac{24-35}{42}\right)\div\left(\frac{-3}{4}\right)=\left(\frac{-11}{42}\right)\div\left(\frac{-3}{4}\right)=\frac{\frac{-11}{42}}{\frac{-3}{4}}=\left(\frac{-11}{42}\right)\times\left(\frac{4}{-3}\right)=\frac{(-11)\times4}{42\times(-3)}=\frac{-44}{-126}=\boxed{\frac{22}{63}}$

d) $\left(\frac{11}{3}+\frac{11}{6}-\frac{11}{4}\right)\div\left(\frac{19}{8}-\frac{1}{4}\right)=$

Primeiramente, vamos resolver as operações com frações indicadas dentro dos parênteses apresentados à esquerda. Assim, temos:

$\frac{11}{3}+\frac{11}{6}-\frac{11}{4}=\frac{4.11+2.11-3.11}{12}=\frac{44+22-33}{12}=\frac{33}{12}$

↓ ↓ ↓ ↓

→ Agora vamos resolver as operações indicadas dentro dos parênteses apresentados à direita. Assim, temos:

$\frac{19}{8}-\frac{1}{4}=\frac{1.19-2.1}{8}=\frac{19-2}{8}=\frac{17}{8}$

→ Agora vamos substituir, no numerador e no denominador, as operações indicadas pelos seus respectivos resultados. Assim, temos:

$=\frac{33}{12}\div\frac{17}{8}$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

Agora vamos resolver a divisão de frações indicada acima. Assim:

$\frac{33}{12}\div\frac{17}{8}=\frac{\frac{33}{12}}{\frac{17}{8}}=\frac{33}{12}\times\frac{8}{17}=\frac{33.8}{12.17}=\frac{264}{204}$ → Simplificando por 12 → $=\boxed{\frac{22}{17}}$

<u>ATENÇÃO</u>: A resolução apresentada acima foi feita em partes para o aluno entender cada uma das etapas da resolução. Matematicamente, a resolução formal dessa expressão com frações é apresentada a seguir:

$$\left(\frac{11}{3}+\frac{11}{6}-\frac{11}{4}\right)\div\left(\frac{19}{8}-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{4\times11+2\times11-3\times11}{12}\right)\div\left(\frac{1\times19-2\times1}{8}\right)=\left(\frac{44+22-33}{12}\right)\div\left(\frac{19-2}{8}\right)=\frac{33}{12}\div\frac{17}{8}=\frac{\frac{33}{12}}{\frac{17}{8}}=\frac{33}{12}\times\frac{8}{17}=\frac{33\times8}{12\times17}=\frac{264}{204}=\frac{22}{17}$$

EXERCÍCIOS:

1) Resolva as expressões numéricas abaixo:

a) $\left(\frac{3}{4}\times\frac{14}{6}+\frac{3}{2}\right)\div\left(\frac{3}{8}+\frac{7}{4}\right)=$

$\boxed{\frac{26}{17}}$

b) $\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\right)\div\frac{11}{2}=$

$\boxed{\frac{1}{4}}$

c) $\frac{13}{4}\div\left(\frac{7}{4}-\frac{5}{6}+\frac{31}{12}\right)=$

$\boxed{\frac{13}{14}}$

d) $\frac{9}{8} \div \left(\frac{7}{5} + \frac{7}{10} - \frac{3}{4} \right) =$

$\boxed{\frac{5}{6}}$

e) $\left(\frac{7}{4} + \frac{5}{2} \right) \div \left(\frac{25}{8} - \frac{9}{4} \right) =$

$\boxed{\frac{34}{7}}$

POTÊNCIAS DE DEZ:

Em Física, Matemática e Química utilizamos as Potências de Dez para facilitar a escrita de números muito grandes (ou muito pequenos). Em alguns casos também existe a necessidade de realizarmos operações com números representados na forma de Potências de Dez.

Existem várias maneiras de se proceder para obter a escrita de um número qualquer em potência de dez. Vamos apresentar, logo abaixo, uma dessas maneiras.

Se deslocarmos a vírgula do número decimal x casas para a direita, devemos diminuir as mesmas x casas no expoente da Potência de Dez.

Se deslocarmos a vírgula do número decimal x casas para a esquerda, devemos aumentar as mesmas x casas no expoente da Potência de Dez.

EXEMPLOS:

1) Represente os números decimais apresentados abaixo na forma de Potências de Dez:

a) 0,02 =

Lembrando que qualquer número elevado a zero é igual a 1, podemos escrever 0,02 como $0{,}02.10^0$, sem alterar o número original, pois o estamos multiplicando por 1.
Queremos representar esse número em Potência de Dez. Para isso, devemos utilizar os algarismos apresentados no número de tal forma a fazer aparecer, na frente da potência de dez, um número que seja maior do 1 e menor do que 10. Neste caso, com os algarismos apresentados, o "melhor" número que conseguimos escrever, nessas condições, é 2.
Escolhido o número, agora vamos deslocar a vírgula do número original de tal forma a chegarmos ao número escolhido. Para tanto, devemos deslocar a vírgula duas casas para a direita e, como conseqüência, vamos diminuir também duas casas no expoente da potência de dez.
Assim, temos:

$0{,}02.10^0 = 2.10^{0-2} = \boxed{2\,.10^{-2}}$ → **esse é o número apresentado originalmente, escrito em Potência de Dez**

---

b) 1300 =

Lembrando que qualquer número elevado a zero é igual a 1, podemos escrever 1300 como 1300.10^0, sem alterar o número original, pois o estamos multiplicando por 1.
Queremos representar esse número em Potência de Dez. Para isso, devemos utilizar os algarismos apresentados no número de tal forma a fazer aparecer, na frente da potência de dez, um número que seja maior do 1 e menor do que 10. Neste caso, com os algarismos apresentados, o "melhor" número que conseguimos escrever, nessas condições, é **1,300**.
Escolhido o número, agora vamos deslocar a vírgula do número original de tal forma a chegarmos ao número escolhido. Para tanto, devemos deslocar a vírgula três casas para a esquerda e, como conseqüência, vamos aumentar (**somar**) também três casas no expoente da potência de dez.
Assim, temos:

$1300.10^0 = 1{,}300.10^{0+3} = \boxed{1{,}3\,.10^3}$ → **esse é o número apresentado originalmente, escrito em Potência de Dez**

c) 0,00041 =

Lembrando que qualquer número elevado a zero é igual a 1, podemos escrever 0,00041 como $0{,}00041.10^0$, sem alterar o número original, pois o estamos multiplicando por 1.
Queremos representar esse número em Potência de Dez. Para isso, devemos utilizar os algarismos apresentados no número de tal forma a fazer aparecer, na frente da potência de dez, um número que seja maior do 1 e menor do que 10. Neste caso, com os algarismos apresentados, o "melhor" número que conseguimos escrever, nessas condições, é 4,1.
Escolhido o número, agora vamos deslocar a vírgula do número original de tal forma a chegarmos ao número escolhido. Para tanto, devemos deslocar a vírgula quatro casas para a direita e, como conseqüência, vamos diminuir também quatro casas no expoente da potência de dez.
Assim, temos:

$0{,}00041.10^0 = 4{,}1.10^{0-4} = \boxed{4{,}1.10^{-4}}$ → **esse é o número apresentado originalmente, escrito em Potência de Dez**

---

d) 15650 =

Lembrando que qualquer número elevado a zero é igual a 1, podemos escrever 15650 como 15650.10^0, sem alterar o número original, pois o estamos multiplicando por 1.
Queremos representar esse número em Potência de Dez. Para isso, devemos utilizar os algarismos apresentados no número de tal forma a fazer aparecer, na frente da potência de dez, um número que seja maior do 1 e menor do que 10. Neste caso, com os algarismos apresentados, o "melhor" número que conseguimos escrever, nessas condições, é 1,5650.
Escolhido o número, agora vamos deslocar a vírgula do número original de tal forma a chegarmos ao número escolhido. Para tanto, devemos deslocar a vírgula quatro casas para a esquerda e, como conseqüência, vamos aumentar também quatro casas no expoente da potência de dez.
Assim, temos:

$15650 = 15650.10^0 = 1{,}5650.10^{0+4} = \boxed{1{,}5650.10^4}$ → **esse é o número apresentado originalmente, escrito em Potência de Dez**

EXERCÍCIOS:

1) Represente os números decimais apresentados abaixo na forma de Potências de Dez:

a) 13578000 = $\boxed{1{,}538.10^7}$

b) 0,0135 = $\boxed{1{,}35.10^{-2}}$

c) 602000000000000000000000 = $\boxed{6{,}02.10^{23}}$

d) 1000 = $\boxed{1.10^3}$

e) 0,001 = $\boxed{1.10^{-3}}$

f) 55789089 = $\boxed{5{,}5789089.10^{+7}}$

g) 0,0000006758 = $\boxed{6{,}758.10^{-7}}$

h) 0,000000067 = $\boxed{6{,}7.10^{-8}}$

i) 123400000000000 = $\boxed{1{,}234.10^{14}}$

j) 659 = $\boxed{6{,}59.10^2}$

k) 0,0000000000000000000000000000000000000000000000056789 = $\boxed{5{,}6789.10^{-49}}$

l) 21 = $\boxed{2{,}1.10^1}$

m) 99900000 = $\boxed{9{,}99.10^7}$

OPERAÇÕES COM POTÊNCIAS DE DEZ:

Em Física e Química é bastante comum multiplicarmos ou dividirmos números muito grandes (ou muito pequenos) que estejam escritos na forma de Potências de Dez.

Para realizar estas operações devemos seguir as regras válidas para operações com números escritos na forma de potências com bases iguais, uma vez que todos os números utilizados serão escritos em função da ***base 10***.

As regras a serem utilizadas são as seguintes:

MULTIPLICAÇÃO DE POTÊNCIAS DE MESMA BASE:

Mantém-se a base e somam-se os expoentes da Potência.

DIVISÃO DE POTÊNCIAS DE MESMA BASE:

Mantém-se a base e diminuem-se os expoentes da Potência.

EXEMPLOS:

1) Efetue:

a) $9.10^9 \times 2.10^4 =$

Como temos um produto de potências de mesma base (10), podemos reescrever a ordem dos fatores sem alterar o produto. Assim, temos:

$9.10^9 . 2.10^4 = 9.2.10^9.10^4$

→ Agora vamos realizar normalmente o produto entre os números apresentados e, para as potências de dez, vamos seguir a regra apresentada para o produto: ***Manteremos a base (10) e vamos somar os expoentes.*** Assim, temos:

$9.\,2.\,10^9.10^4 =$

$18\ 10^{9+4} = \boxed{\mathbf{18.10^{13}}}$

ATENÇÃO: o número 18.10^{13} pode ser escrito, sem ser alterado, levando-se em consideração as "regras" que foram apresentadas em POTÊNCIAS DE DEZ. Assim, temos:

$\boxed{18.10^{13} = \mathbf{1,8.10^{14}}}$

b) $1,56.10^{-4} \times 6,12.10^6 =$

Como temos um produto de potências de mesma base (10), podemos reescrever a ordem dos fatores sem alterar o produto. Assim, temos:

$(1,56.10^{-4}).\ (6,12.10^6) = (1,56).(6,12).10^{-4}.10^6$

→ Agora vamos realizar normalmente o produto entre os números apresentados e, para as potências de dez, vamos seguir a regra apresentada para o produto: ***Manteremos a base (10) e vamos somar os expoentes.*** Assim, temos:

$(1,56).(6,12).10^{-4}.10^6 =$

$9,5472\ 10^{-4+6} = \boxed{\mathbf{9,5472.10^2}}$

c) $2,56.10^{-2} \times 3,19.10^{-3} =$

Como temos um produto de potências de mesma base (10), podemos reescrever a ordem dos fatores sem alterar o produto. Assim, temos:

$(2,56.10^{-2}).\ (3,19.10^{-3}) = (2,56).(3,19).10^{-2}.10^{-3}$

→ Agora vamos realizar normalmente o produto entre os números apresentados e, para as potências de dez, vamos seguir a regra apresentada para o produto: ***Manteremos a base (10) e vamos somar os expoentes.*** Assim, temos:

$(2,56).(3,19).10^{-2}.10^{-3} =$

$8,1664\ 10^{-2+(-3)}$

$8,1664\ 10^{-2-3} = \boxed{\mathbf{8,1664.10^{-5}}}$

d) $6.10^9 \div 3.10^6 =$

Vamos escrever a divisão aqui apresentada na forma de uma fração. Assim, temos:

$6.10^9 \div 3.10^6 = \dfrac{6.10^9}{3.10^6}$

→ Agora vamos realizar normalmente a divisão entre os números apresentados e, para as potências de dez, vamos seguir a regra apresentada para a divisão: ***Manteremos a base (10) e vamos subtrair os expoentes.*** Assim, temos:

$\dfrac{6}{3}\ \dfrac{10^9}{10^6} =$

$2\ 10^{9-6} = \boxed{\mathbf{2.10^3}}$

e) $3{,}2.10^{12} \div 1{,}6.10^{8} =$

Vamos escrever a divisão aqui apresentada na forma de uma fração. Assim, temos:

$(3{,}2).10^{12} \div (1{,}6).10^{8} = \dfrac{3{,}2.10^{12}}{1{,}6.10^{8}}$

→

Agora vamos realizar normalmente a divisão entre os números apresentados e, para as potências de dez, vamos seguir a regra apresentada para a divisão: ***Manteremos a base (10) e vamos subtrair os expoentes.*** Assim, temos:

$$\frac{3{,}2}{1{,}6} . \frac{10^{12}}{10^{8}} =$$

$$2 . 10^{12-8} = \boxed{2.10^{4}}$$

---

f) $10{,}373.10^{-5} \div 4{,}51.10^{-4} =$

Vamos escrever a divisão aqui apresentada na forma de uma fração. Assim, temos:

$(10{,}373).10^{-5} \div (4{,}51).10^{-4} = \dfrac{10{,}373.10^{-5}}{4{,}51.10^{-4}}$

→

Agora vamos realizar normalmente a divisão entre os números apresentados e, para as potências de dez, vamos seguir a regra apresentada para a divisão: ***Manteremos a base (10) e vamos subtrair os expoentes.*** Assim, temos:

$$\frac{10{,}373}{4{,}51} . \frac{10^{-5}}{10^{-4}} =$$

$$2{,}3 . 10^{-5-(-4)}$$

$$2{,}3 . 10^{-5+4} = \boxed{2{,}3.10^{-1}}$$

EXERCÍCIOS:

1) Efetue:

a) $4{,}23.10^{5} \div 2{,}3.10^{2} =$

$\boxed{1{,}83913.10^{3}}$

b) $9{,}7.10^{2} \div 1{,}3.10^{5} =$

$\boxed{7{,}461538.10^{-3}}$

c) $1{,}05.10^{-3} \div 3{,}78.10^{9} =$

$\boxed{2{,}777777.10^{-13}}$

d) $3{,}09.10^{-12} \div 2{,}4.10^{2} =$

$\boxed{1{,}2875.10^{-14}}$

e) $15.10^{-5} \div 3.10^{-7} =$

$\boxed{5.10^{2}}$

f) $81.10^{-35} \div 3.10^{-74} =$

$\boxed{2{,}7.10^{40}}$

g) $3.10^{-9} \div 1{,}37.10^{12} =$

$\boxed{2{,}189781.10^{-21}}$

h) $9.10^{9} \times 3.10^{-6} =$

$\boxed{2{,}7.10^{4}}$

i) $1{,}45.10^{12} \times 4{,}988.10^{-12} =$

$\boxed{7{,}2326}$

j) $45.10^{-4} \times 7.10^{-9} =$

$\boxed{3{,}15.10^{-11}}$

k) $34.10^{-7} \times 12.10^{-4} \times 3.10^{12} =$

$\boxed{1{,}224.10^{4}}$

l) $1{,}6.10^{-19} \times 8.10^{-6} =$

$\boxed{1{,}28.10^{-24}}$

m) $3{,}421.10^{-8} \times 3{,}2213.10^{12} =$

$\boxed{1{,}102006.10^{5}}$

n) $4{,}5.10^{-4} \times 0{,}0889.10^{-12} =$

$\boxed{4{,}0005.10^{-17}}$

o) $3.10^{-7} \times 4.10^{4} \times 1{,}054.10^{-19} =$

$\boxed{1{,}2648.10^{-21}}$

RACIONALIZAÇÃO:

É o método utilizado para fazer com que um radical (indicado por uma raiz - $\sqrt{\ }$) que aparece no denominador de uma fração passe para o numerador da mesma fração, sem alterar o seu valor inicial.

A principal vantagem de se efetuar a racionalização de uma fração que apresenta um radical (raiz) em seu denominador é que conseguiremos tirar o M.M.C. do denominador da fração facilmente, pois iremos "deslocar" o radical para o numerador da fração. Caso não efetuássemos a racionalização, seria necessário tirar o M.M.C. entre números inteiros e entre um radical (raiz), o que tornaria o processo bastante trabalhoso.

Para entender esse processo, analise os exemplos abaixo:

EXEMPLOS:

1) Racionalize:

a) $\frac{5}{\sqrt{3}} =$

Se multiplicarmos uma fração por 1, não alteraremos o seu resultado. Para racionalizarmos a fração ao lado, vamos multiplicá-la por 1.
Porém, o número 1 será representado por uma fração cujo numerador e o denominador sejam iguais entre si, o que torna o resultado dessa fração igual a 1.
Nesse processo, o número escolhido para compor essa nova fração será sempre igual ao denominador da fração original (nesse caso $\sqrt{3}$). Assim, temos:

$$\frac{5}{\sqrt{3}} \times \boxed{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \rightarrow = 1$$

→

No denominador dessa fração agora temos o produto:

$$\sqrt{3} \times \sqrt{3} =$$

Como temos um produto de termos iguais, podemos escrevê-lo como sendo um destes termos ao quadrado. Assim:

$$\sqrt{3} \times \sqrt{3} = \left(\sqrt{3}\right)^2$$

Agora podemos simplificar o 2 da potência com o dois do radical (raiz quadrada). Assim temos:

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

Agora vamos substituir o resultado obtido na fração original. Assim, temos:

$$\frac{5\sqrt{3}}{3}$$ → Resultado da racionalização

ATENÇÃO: A resolução apresentada acima foi feita em partes para o aluno entender cada uma das etapas da resolução. Matematicamente, a resolução formal dessa racionalização é apresentada a seguir:

$$\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

b) $\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\boxed{\frac{2\sqrt{7}}{7}}\rightarrow$ Resposta

c) $\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3\times\sqrt{3}}}=\frac{\cancel{3}\times\sqrt{3}}{\cancel{3}}=\boxed{\sqrt{3}}\rightarrow$ Resposta

d) $\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\boxed{\frac{7\sqrt{5}}{5}}\rightarrow$ Resposta

EXERCÍCIO:

1) Racionalize:

a) $\frac{7}{\sqrt{11}}=$ $\boxed{\frac{7\sqrt{11}}{11}}$

b) $\frac{5}{\sqrt{5}}=$ $\boxed{\sqrt{5}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}=$ $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

d) $\frac{9}{\sqrt{3}}=$ $\boxed{3\sqrt{3}}$

e) $\frac{5}{\sqrt{3}}=$ $\boxed{\frac{5\sqrt{3}}{3}}$

f) $\frac{1}{\sqrt{11}}=$ $\boxed{\frac{\sqrt{11}}{11}}$

REGRA DE TRÊS SIMPLES:

É um artifício matemático largamente utilizado em nosso cotidiano para efetuar cálculos de maneira rápida e simples, quando se tem três variáveis e apenas uma incógnita que apresentam uma relação direta entre si (ou seja, onde as variáveis e a incógnita são diretamente proporcionais entre si).

Basicamente, para montar uma Regra de Três Simples, deve-se montar as variáveis e a incógnita respeitando-se as suas proporções. A partir daí, a resolução matemática se torna o que popularmente chamamos de "***multiplicação em cruz***" ou ainda "***multiplicação em x***".

Para entender e treinar a resolução de problemas matemáticos utilizando a Regra de Três Simples, analise os exemplos abaixo:

EXEMPLOS:

1) Numa viagem, um Opala gasta 16 litros de gasolina para percorrer 140Km. Se o carro se movimentar com a mesma velocidade, quantos litros de gasolina o carro gastará para percorrer 1500Km?

A relação entre as grandezas apresentadas é diretamente proporcional, ou seja, quanto maior for a distância percorrida, mais gasolina o carro irá gastar.
Assim, podemos resolver o problema utilizando Regra de Três Simples.

→

Vamos montar o problema escrevendo as grandezas iguais uma em cima da outra. A incógnita será aqui representada pela letra **x**. Assim, temos:

DISTÂNCIA (Km)	QUANTIDADE DE GASOLINA (litros)
140	16
1500	x

↓

A relação entre as grandezas pode ser escrita como segue:

$$\frac{140}{1500} = \frac{16}{x}$$

→

Para resolver, vamos "***multiplicar em x***" e, depois, vamos isolar x. Assim, temos:

$140.\ x = 1500.16 \rightarrow x = \frac{1500.16}{140} \rightarrow \mathbf{x = 171{,}428\ litros}$

RESPOSTA: o carro irá gastar 171,428 litros de gasolina para percorrer os 1500Km.

2) Considerando o Exemplo anterior, se cada litro de gasolina custa R$ 2,599, qual será o valor gasto em gasolina nessa viagem?

A relação entre as grandezas apresentadas é diretamente proporcional, ou seja, quanto mais gasolina é gasta, maior será o valor gasto na viagem.
Assim, podemos resolver o problema utilizando Regra de Três Simples.

→

Vamos montar o problema escrevendo as grandezas iguais uma em cima da outra. A incógnita será aqui representada pela letra **x**. Assim, temos:

VALOR GASTO (R$)	QUANTIDADE DE GASOLINA (litros)
2,599	1
x	171,428

↓

A relação entre as grandezas pode ser escrita como segue:

$$\frac{2{,}599}{x} = \frac{1}{171{,}428}$$

→

Para resolver, vamos "***multiplicar em x***" e, depois, vamos isolar x. Assim, temos:

$1.\ x = (2{,}599).(171{,}428) \rightarrow x = 445{,}54 \rightarrow$ **R$ 445,54**

RESPOSTA: o valor gasto em gasolina na viagem será de R$ 445,54

3) Uma mangueira aberta despeja 1500 litros de água numa piscina em 2 horas. Quantas horas essa mesma mangueira irá levar para encher uma piscina, completamente vazia, de capacidade 30000 litros?

A relação entre as grandezas apresentadas é diretamente proporcional, ou seja, quanto mais água é necessária para encher a piscina, mais tempo demorará para enchê-la.
Assim, podemos resolver o problema utilizando Regra de Três Simples.

→

Vamos montar o problema escrevendo as grandezas iguais uma em cima da outra. A incógnita será aqui representada pela letra **x**. Assim, temos:

TEMPO (em horas)	QUANTIDADE DE ÁGUA (litros)
2	1500 litros
x	30000 litros

↓

A relação entre as grandezas pode ser escrita como segue:

$$\frac{2}{x} = \frac{1500}{30000}$$

→

Para resolver, vamos "***multiplicar em x***" e, depois, vamos isolar x. Assim, temos:

$1500.\ x = 2.\ 30000 \rightarrow x = \frac{2.\ 30000}{1500} \rightarrow \mathbf{x = 40\ horas}$

RESPOSTA: a mangueira levará 40 horas para encher completamente a piscina.

4) Uma doceira consegue produzir 500 doces em três horas. Se essa doceira trabalhar nesse mesmo ritmo durante 17h seguidas, quantos doces inteiros ela terá produzido?

A relação entre as grandezas apresentadas é diretamente proporcional, ou seja, quanto mais tempo a doceira trabalhar, mais doces irá produzir.
Assim, podemos resolver o problema utilizando Regra de Três Simples.

→

Vamos montar o problema escrevendo as grandezas iguais uma em cima da outra. A incógnita será aqui representada pela letra **x**. Assim, temos:

TEMPO (em horas)	QUANTIDADE DE DOCES PRODUZIDOS
3	500
17	x

↓

A relação entre as grandezas pode ser escrita como segue:

$$\frac{3}{17} = \frac{500}{x}$$

→

Para resolver, vamos "***multiplicar em x***" e, depois, vamos isolar x. Assim, temos:

$3 . x = 500 . 17 \rightarrow x = \frac{500 . 17}{3} \rightarrow$ **$x = 2833,33$ doces**

RESPOSTA: a doceira irá produzir 2833 doces inteiros.

5) Três máquinas idênticas, juntas, produzem 15000 camisas a cada dia trabalhado. Se apenas uma das máquinas trabalhar no final de semana (sábado e domingo), quantas camisas a máquina irá produzir?

ATENÇÃO: se as três máquinas produzem juntas 15000 camisas por dia, isto significa que cada máquina produziu 5000 camisas.

A relação entre as grandezas apresentadas é inversamente proporcional, ou seja, quanto menos máquinas trabalhando, menor a quantidade de camisas a ser produzida.
Assim, podemos resolver o problema utilizando Regra de Três Simples.

→

Vamos montar o problema escrevendo as grandezas iguais uma em cima da outra. A incógnita será aqui representada pela letra **x**. Assim, temos:

TEMPO (em dias)	QUANTIDADE DE CAMISAS PRODUZIDAS
1	5000
2	x

↓

A relação entre as grandezas pode ser escrita como segue:

$$\frac{1}{2} = \frac{5000}{x}$$

→

Para resolver, vamos "***multiplicar em x***" e, depois, vamos isolar x. Assim, temos:

$1 . x = 5000 . 2 \rightarrow x = 5000 . 2 \rightarrow$ **$x = 10000$ camisas**

RESPOSTA: a máquina irá produzir 10000 camisas num final de semana.

EXERCÍCIOS:

1) Uma Caravan gasta 19 litros de combustível para percorrer 133Km. Quantos litros de combustível esse carro irá gastar para percorrer 882Km na mesma velocidade?

126 litros

2) Uma torneira aberta despeja numa pia 2700 litros de água durante 90 minutos. Quantos litros de água serão despejados pela mesma torneira durante 14 minutos?

420 litros

3) Num livro existem 270 páginas, cada uma delas com 40 linhas de texto. Se fossem escritas apenas 30 linhas em cada página, qual seria o número de páginas desse livro?

360 páginas

4) Com uma certa quantidade fio, uma máquina fabrica uma peça de tecido que possui 20m de comprimento e 0,6m de largura. Utilizando a mesma quantidade de fio, qual seria o comprimento da peça de tecido se a sua largura fosse de 0,8m?

15 metros

5) Numa indústria, três máquinas idênticas produzem 1350 peças metálicas em 1 hora. Se a indústria comprar mais duas máquinas iguais e colocar todas as máquinas em funcionamento, quantas peças metálicas seriam produzidas no mesmo tempo?

2250 peças

6) Um Opala que se movimenta com velocidade de 60Km/h leva 7,5 horas para percorrer uma determinada distância. Para percorrer a mesma distância em 6h, qual deve ser a velocidade do carro?

75 Km/h

7) Ao apertarmos um determinado parafuso, devemos girá-lo 10 voltas completas para que ele penetre 4,5mm numa chapa de madeira. Se desejarmos que o parafuso penetre 6,3mm na chapa de madeira, em quantas voltas completas devemos girar o parafuso?

14 voltas

8) Numa determinada Construtora, oito pedreiros conseguem fabricar uma casa em 30 dias consecutivos de trabalho. Se forem contratados mais quatro pedreiros que serão postos para trabalhar junto com os outros, em quantos dias uma casa idêntica será construída?

20 dias

9) Com um galão de tinta de 3,6 litros consegue-se pintar $40m^2$ de piso. Se precisarmos pintar $200m^2$ de piso, quantos galões de tinta deverão ser comprados?

5 galões

10) Um passarinho come diariamente 150 grãos de alpiste. Quantos grãos de alpiste serão comidos pelo mesmo passarinho durante 1 ano (365dias)?

54750 grãos de alpiste

REGRA DE TRÊS COMPOSTA:

Na Regra de Três Composta, devem ser levadas em conta três situações que acontecem simultaneamente, uma influenciando as outras direta ou inversamente. Geralmente, apresentam uma incógnita e cinco variáveis.

Para entender o método de resolução dos problemas, vamos aos exemplos:

EXEMPLOS:

1) Dois operários produzem, em cinco dias, 320 peças de um certo produto. Quantas peças desse produto serão produzidas por 5 operários trabalhando durante 8 dias?

A relação entre as grandezas apresentadas é diretamente proporcional, ou seja, quanto mais operários trabalhando e quanto maior for o tempo de trabalho, mais peças serão produzidas..
Assim, podemos resolver o problema utilizando Regra de Três Composta.

→

Vamos montar o problema escrevendo as grandezas iguais uma em cima da outra. A incógnita será aqui representada pela letra **x**. Assim, temos:

PEÇAS	OPERÁRIOS	DIAS
320	2	5
x	5	8

↓

A relação entre as grandezas pode ser escrita como segue:

$$\frac{320}{x} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8}$$

→

Para resolver, inicialmente podemos simplificar o 5. Agora vamos "***multiplicar em x***" e, depois, vamos isolar x. Assim, temos:

$\frac{320}{x} = \frac{2}{8} \rightarrow 2.\,x = 320.8 \rightarrow x = \frac{320.8}{2} \rightarrow$ **x = 1280 peças**

RESPOSTA: os cinco operários produzirão, em 8 dias, 1280 peças.

2) O motor de um barco consome 200 litros de combustível em cinco horas de viagem, trabalhando a 1500 R.P.M. (Rotações Por Minuto). Se a rotação do motor for aumentada para 1800 R.P.M., quantos litros de combustível serão consumidos durante três horas de viagem?

A relação entre todas as grandezas apresentadas é diretamente proporcional, ou seja, quanto maior a rotação do motor, mais combustível será consumido.
Assim, podemos resolver o problema utilizando Regra de Três Composta.

→

Vamos montar o problema escrevendo as grandezas iguais uma em cima da outra. A incógnita será aqui representada pela letra **x**. Assim, temos:

COMBUSTÍVEL (l)	ROTAÇÕES POR MINUTO	HORAS
200	1500	5
x	1800	3

↓

A relação entre as grandezas pode ser escrita como segue:

$$\frac{200}{x} = \frac{1500}{1800} \cdot \frac{5}{3}$$

→

Para resolver, vamos efetuar o produto de frações e vamos "***multiplicar em x***". Depois, vamos isolar x. Assim, temos:

$\frac{200}{x} = \frac{1500.5}{1800.3} \rightarrow \frac{200}{x} = \frac{7500}{5400} \rightarrow 7500.x = 200.5400 \rightarrow x = \frac{200.5400}{7500} \rightarrow$ **x = 144 litros**

RESPOSTA: o motor do barco, em 1800 R.P.M., irá consumir 144 litros de combustível em 3 horas.

EXERCÍCIOS:

1) São necessários 1064Kg de feno para alimentar 14 cavalos durante 12 dias. Quantos quilogramas de feno serão necessários para alimentar 6 cavalos durante 60 dias?

2280Kg

2) Dezoito operários, trabalhando 7 horas por dia, durante 12 dias conseguem fazer um determinado serviço. Trabalhando 9 horas por dia, 12 operários farão o mesmo serviço em quantos dias?

14 dias

3) Se a alimentação de 12 animais, durante 8 dias, custa R$ 160, qual será o custo da alimentação de 15 animais, durante 5 dias?

R$ 125,00

4) Uma indústria cerâmica produz 30000 tijolos em 30 dias, trabalhando 10 horas por dia. Quantos tijolos a indústria irá produzir, trabalhando 8 horas por dia durante 15 dias?

12000 tijolos

PORCENTAGEM:

Ao pensarmos em porcentagem, podemos entender, de maneira simplificada, este termo como sendo um termo que relaciona "***uma quantidade de partes de um todo***". Isso quer dizer que, se fizermos uma compra e recebermos um desconto de 25% para pagamento à vista, significa que iremos pagar apenas 75 das cem partes possíveis.

Em geral, podemos resolver facilmente problemas simples de porcentagem utilizando a ***Regra de Três Simples***, que já estudamos anteriormente. Para entender melhor, analise os exemplos abaixo:

EXEMPLOS:

1) Calcular 12% de R$ 1500,00.

Vamos montar o problema escrevendo as grandezas iguais uma em cima da outra. A incógnita será aqui representada pela letra **x**. Assim, temos:

VALOR (R$)	PORCENTAGEM (%)
1500	100
x	12

A relação entre as grandezas pode ser escrita como segue:

$$\frac{1500}{x} = \frac{100}{12}$$

Para resolver, vamos "***multiplicar em x***" e, depois, vamos isolar x. Assim, temos:

$$100.\,x = 1500\,.12 \rightarrow x = \frac{1500.\,12}{100} \rightarrow \mathbf{x = R\$\ 180{,}00}$$

RESPOSTA: 12% DE R$ 1500,00 equivale a R$ 180,00

2) Calcular 1,5% de R$ 6000,00

Vamos montar o problema escrevendo as grandezas iguais uma em cima da outra. A incógnita será aqui representada pela letra **x**. Assim, temos:

VALOR (R$)	PORCENTAGEM (%)
6000	100
x	1,5

A relação entre as grandezas pode ser escrita como segue:

$$\frac{6000}{x} = \frac{100}{1{,}5}$$

Para resolver, vamos "***multiplicar em x***" e, depois, vamos isolar x. Assim, temos:

$$100.\,x = 6000.(1{,}5) \rightarrow x = \frac{6000.(1{,}5)}{100} \rightarrow \mathbf{x = R\$\ 90{,}00}$$

RESPOSTA: 1,5% DE R$ 6000,00 equivale a R$ 90,00

3) Uma máquina de lavar roupa custa R$ 1249,90. Para pagamento à vista, a loja fornece um desconto de 6%. Qual será a economia do comprador se ele pagar à vista?

Vamos montar o problema escrevendo as grandezas iguais uma em cima da outra. A incógnita será aqui representada pela letra **x**. Assim, temos:

VALOR (R$)	PORCENTAGEM (%)
1249,90	100
x	6

A relação entre as grandezas pode ser escrita como segue:

$$\frac{1249{,}90}{x} = \frac{100}{6}$$

Para resolver, vamos "***multiplicar em x***" e, depois, vamos isolar x. Assim, temos:

$$100.\,x = (1249{,}90)\,.6 \rightarrow x = \frac{(1249{,}90).6}{100} \rightarrow \mathbf{x = R\$\ 74{,}99}$$

RESPOSTA: a economia do comprador será de R$ 74,99

4) Uma máquina de lavar roupa custa R$ 949,90. Para pagamento à vista, a loja fornece um desconto de 7%. Qual será o valor pago pelo comprador na máquina se ele pagar à vista?

Vamos montar o problema escrevendo as grandezas iguais uma em cima da outra. A incógnita será aqui representada pela letra **x**. Assim, temos:

VALOR (R$)	PORCENTAGEM (%)
949,90	100
x	7

A relação entre as grandezas pode ser escrita como segue:

$$\frac{949{,}90}{x} = \frac{100}{7}$$

Para resolver, vamos "***multiplicar em x***" e, depois, vamos isolar x. Assim, temos:

$100.\ x = (949{,}90)\ .7 \rightarrow x = \frac{(949{,}90).7}{100} \rightarrow$ **x = R$ 66,49**

Para saber o valor pago na máquina, devemos diminuir o valor da máquina com o desconto obtido. Assim:

949,90 – 66,49 = **R$ 883,41**

RESPOSTA: o valor pago, à vista, será de R$ 883,41

5) No mês de fevereiro, todos os proprietários de veículos devem pagar o IPVA. Este tributo corresponde a 2,5% do valor do veículo indicado na Tabela F.I.P.E.. Se o valor de um carro, indicado na Tabela F.I.P.E., é de R$ 45.000,00, qual será o valor do IPVA a ser pago?

Vamos montar o problema escrevendo as grandezas iguais uma em cima da outra. A incógnita será aqui representada pela letra **x**. Assim, temos:

VALOR (R$)	PORCENTAGEM (%)
45.000,00	100
x	2,5

A relação entre as grandezas pode ser escrita como segue:

$$\frac{45000}{x} = \frac{100}{(2{,}5)}$$

Para resolver, vamos "***multiplicar em x***" e, depois, vamos isolar x. Assim, temos:

$100.\ x = 45000.(2{,}5) \rightarrow x = \frac{45000.(2{,}5)}{100} \rightarrow$ **x = R$ 1125,00**

RESPOSTA: o valor a ser pago no IPVA é de R$ 1125,00

6) Uma loja parcela uma compra de R$ 1123,00 em 10 parcelas mensais de valores iguais, cobrando 2% de juros ao mês. Considerando apenas cálculos de porcentagem, qual será o valor pago:

a) No total da compra;

Em cada parcela mensal, cobra-se um juros de 2%. Como a compra foi feita em dez parcelas, o total de juros pagos será de 20%. Assim, deve-se pagar os 100% da compra **MAIS** os 20% de juros, o que totaliza 120%. É essa porcentagem que deve ser calculada.

Vamos montar o problema escrevendo as grandezas iguais uma em cima da outra. A incógnita será aqui representada pela letra **x**. Assim, temos:

VALOR (R$)	PORCENTAGEM (%)
1123,00	100
x	120

A relação entre as grandezas pode ser escrita como segue:

$$\frac{1123}{x} = \frac{100}{120}$$

Para resolver, vamos "***multiplicar em x***" e, depois, vamos isolar x. Assim, temos:

$100.\ x = 1123\ .120 \rightarrow x = \frac{1123.120}{100} \rightarrow$ **x = R$ 1347,60** → esse é o valor total a ser pago

RESPOSTA: o valor total a ser pago na compra será de R$ 1347,60

b) em cada parcela.

Como o valor total foi dividido em dez parcelas, devemos dividir o valor calculado acima por dez para sabermos o valor de cada parcela. Assim:

1347,60 ÷ 10 = **R$ 134,76** → **esse é o valor de cada parcela**

RESPOSTA: o valor de cada parcela será de R$ 134,76

7) Numa loja, um produto é anunciado custando R$ 656,39 para pagamento parcelado, supostamente "sem juros". Se o produto for pago à vista, o seu preço cai para R$ 590,75. Calcule a porcentagem de desconto que é fornecida pela loja para pagamento à vista.

Vamos montar o problema escrevendo as grandezas iguais uma em cima da outra. A incógnita será aqui representada pela letra **x**. Assim, temos:

VALOR (R$)	PORCENTAGEM (%)
656,39	100
590,75	x

→

A relação entre as grandezas pode ser escrita como segue:

$$\frac{656,39}{590,75} = \frac{100}{x}$$

↓ ↓

Para resolver, vamos "***multiplicar em x***" e, depois, vamos isolar x. Assim, temos:

$(656,39).\ x = 100.(590,75) \rightarrow x = \dfrac{100.(590,75)}{656,39} \rightarrow \mathbf{x = 89,99\%}$

→

Assim, foi pago, à vista, 89,99% do valor proposto. Para calcular a porcentagem de desconto, devemos diminuir 100% desse valor:

100% - 89,99% = **10,01%**

RESPOSTA: para pagamento à vista, a loja fornece 10,01% de desconto.

EXERCÍCIOS:

1) Calcule:

a) 1,25% de R$ 600,00

R$ 7,50

b) 22,33% de R$ 553,12

R$ 123,51

c) 20,076% de R$ 3321,87

R$ 666,89

d) 135% de R$ 87,00

R$ 117,45

e) 167% de R$ 342,11

R$ 571,32

f) 25% de R$ 200,00

R$ 50,00

2) Numa compra, foram dados R$ 30 de desconto. Se o desconto fornecido era de 12%, calcule o valor que seria pago na mesma compra, sem desconto.

R$ 250,00

3) Numa compra, foram dados R$ 2200,00 de desconto. Se o desconto foi de 5%, calcule o valor que seria pago na mesma compra, sem desconto.

R$ 44.000,00

4) O número 12 corresponde a 15% de qual número?

80

5) O número 162 corresponde a 15% de qual número?

1080

6) Numa cidade chamada Tatooine, a população adulta é de 21220 pessoas. Considerando que apenas 55% dessa população trabalha atualmente, qual é o número de trabalhadores na cidade?

11671 pessoas

7) Numa escola, 1220 alunos estudam no Ensino Médio. Se esse montante de alunos corresponde a 40% do total de alunos da escola, calcule o total de alunos matriculados.

3050 alunos

8) Ao comprar um carro novo, o comprador paga o equivalente a 50,06% em impostos sobre o valor final do carro. Considerando os carros indicados abaixo, calcule o valor que foi pago em impostos, em cada caso:

a) Uno Mille, R$ 21.990,00

R$ 11.008,19

b) Palio Fire, R$ 24.990,00

R$ 12.509,99

c) Renault Megane, R$ 49.900,00

R$ 24.979,94

d) Ferrari F40, R$ 1.200.000,00

R$ 600.720,00

e) Chevrolet Cobalt, R$ 38.990,00

R$ 19.518,39

f) Fiat Línea, 52.990,00

R$ 26.526,79

PRODUTOS NOTÁVEIS:

Podemos chamar de produto notável a todo produto cujo resultado pode sempre ser "previsto" através da utilização de um algoritmo simples, o que torna sua resolução mais rápida é prática.

Podemos dividir os produtos notáveis, de acordo com o algoritmo utilizado, da seguinte maneira:

I - QUADRADO DE UMA SOMA:

Podemos aplicar esse produto notável sempre que tivermos ***a soma de dois números quaisquer, elevada ao quadrado***.

Considerando os números a serem somados como sendo os números **a** e **b**, temos:

$$\boxed{(a + b)^2 = (a + b) . (a + b) = a.a + a.b + a.b + b.b = \mathbf{a^2 + 2.a.b + b^2}}$$

Como o resultado se repete, esquematicamente, para quaisquer valores de **a** e de **b**, pode-se enunciar o algoritmo que nos fornece o resultado deste produto da seguinte maneira:

> O quadrado da soma de dois números quaisquer **a** e **b** é igual ***ao quadrado do primeiro número, mais duas vezes o primeiro número pelo segundo número mais o quadrado do segundo número.***

Esse algoritmo pode ser aplicado para qualquer produto que se assemelhe as condições iniciais e nos fornece o resultado do produto sem que haja necessidade de multiplicarmos cada um dos termos entre si, dando agilidade e rapidez ao processo.

Vamos a alguns exemplos:

EXEMPLOS:

1) Desenvolva os produtos notáveis indicados abaixo:

a) $(x + y)^2 =$

Vamos desenvolver esse produto utilizando o algoritmo indicado acima. Nesse exemplo, o primeiro número é x (equivale ao número **a** do algoritmo) e o segundo número é y (equivale ao número **b** do algoritmo). →

Primeiro número: x
Segundo número: y
O quadrado do primeiro número: $\mathbf{x^2}$
Duas vezes o primeiro número pelo segundo número: **2.x.y**
O Quadrado do segundo número: $\mathbf{y^2}$ ↓

→ Juntando todos os termos, conforme indica o algoritmo, temos:

$\mathbf{x^2 + 2.x.y + y^2}$ → Resposta ↓

→ **<u>ATENÇÃO</u>**: só por uma questão de comparação de resultados, vamos desenvolver matematicamente o produto indicado:

$$(x + y)^2 = (x + y) . (x + y) = x. x + x. y + x. y + y .y = \mathbf{x^2 + 2. x. y + y^2}$$

Independentemente do método adotado, os resultados devem, obrigatoriamente, ser iguais entre si, não havendo, portanto, necessidade do desenvolvimento dos dois métodos.

---

b) $(a + 3x)^2 =$

Vamos desenvolver esse produto utilizando o algoritmo indicado acima. Nesse exemplo, o primeiro número é a (equivale ao número **a** do algoritmo) e o segundo número é 3x (equivale ao número **b** do algoritmo). →

Primeiro número: a
Segundo número: 3.x
O quadrado do primeiro número: $\mathbf{a^2}$
Duas vezes o primeiro número pelo segundo número:
$2.\ a.\ 3.x = 2.\ 3.\ a.\ x = \mathbf{6.\ a.\ x}$
O Quadrado do segundo número:
$(3x)^2 = (3.x).(3.x) = 3.3.\ x\ .\ x = \mathbf{9x^2}$ ↓

→ Juntando todos os termos, conforme indica o algoritmo, temos:

$\mathbf{a^2 + 6ax + 9x^2}$ → Resposta ↓

→ **<u>ATENÇÃO</u>**: só por uma questão de comparação de resultados, vamos desenvolver matematicamente o produto indicado:

$$(a + 3x)^2 = (a + 3x) . (a + 3x) = a. a + 3.a. x + 3.a.x + 3x .3x = a^2 + 6.a.x + 3.3.x.x = \mathbf{a^2 + 6ax + 9x^2}$$

Independentemente do método adotado, os resultados devem, obrigatoriamente, ser iguais entre si, não havendo, portanto, necessidade do desenvolvimento dos dois métodos.

c) $(2x + 3y)^2 =$

Vamos desenvolver esse produto utilizando o algoritmo indicado acima. Nesse exemplo, o primeiro número é 2x (equivale ao número **a** do algoritmo) e o segundo número é 3y (equivale ao número **b** do algoritmo). →

Primeiro número: 2.x
Segundo número: 3.y
O quadrado do primeiro número:
$(2x)^2 = (2x).(2x) = 2.2.x.x = \mathbf{4x^2}$
Duas vezes o primeiro número pelo segundo número:
$2.2x.\ 3.y = 2.\ 2.3.\ x.\ y = \mathbf{12.\ x.\ y}$
O Quadrado do segundo número:
$(3y)^2 = (3.y).(3.y) = 3.3.\ y\ .\ y = \mathbf{9y^2}$ ↓

→ Juntando todos os termos, conforme indica o algoritmo, temos:

$\mathbf{4x^2 + 12xy + 9y^2}$ → Resposta ↓

→ **<u>ATENÇÃO</u>**: só por uma questão de comparação de resultados, vamos desenvolver matematicamente o produto indicado:

$(2x + 3y)^2 = (2x + 3y).(2x + 3y) = 2x.2x + 2x.3y + 2x.3y + 3y.3y = 2.2.x.x + 2.3.x.y + 2.3.x.y + 3.3.y.y = 4x^2 + 6xy + 6xy + 9y^2 =$

$$= \mathbf{4x^2 + 12xy + 9y^2}$$

Independentemente do método adotado, os resultados devem, obrigatoriamente, ser iguais entre si, não havendo, portanto, necessidade do desenvolvimento dos dois métodos.

<u>EXERCÍCIOS:</u>

1) Desenvolva os produtos notáveis indicados abaixo:

a) $(5x + 7a)^2 =$

$\mathbf{25x^2 + 70ax + 49a^2}$

b) $(3a + 4)^2 =$

$\mathbf{9a^2 + 24a + 16}$

c) $(7x + 3)^2 =$

$\mathbf{49x^2 + 42x + 9}$

d) $(6x + 5y)^2 =$

$\mathbf{36x^2 + 60xy + 25y^2}$

e) $(5x + 6y)^2 =$

$\mathbf{25x^2 + 60xy + 36y^2}$

II - QUADRADO DE UMA DIFERENÇA:

Podemos aplicar esse produto notável sempre que tivermos ***<u>a diferença de dois números quaisquer, elevada ao quadrado</u>***.

Considerando os números a serem subtraídos como sendo os números **a** e **b**, temos:

$$(a - b)^2 = (a - b)\ .\ (a - b) = a.a - a.b - a.b + b.b = \mathbf{a^2 - 2.a.b + b^2}$$

Como o resultado se repete, esquematicamente, para quaisquer valores de **a** e de **b**, pode-se enunciar o algoritmo que nos fornece o resultado deste produto da seguinte maneira:

O quadrado da diferença de dois números quaisquer **a** e **b** é igual ***ao quadrado do primeiro número, menos duas vezes o primeiro número pelo segundo número mais o quadrado do segundo número.***

Esse algoritmo pode ser aplicado para qualquer produto que se assemelhe as condições iniciais e nos fornece o resultado do produto sem que haja necessidade de multiplicarmos cada um dos termos entre si, dando agilidade e rapidez ao processo.

Vamos a alguns exemplos:

EXEMPLOS:

1) Desenvolva os produtos notáveis indicados abaixo:

a) $(x - y)^2 =$

Vamos desenvolver esse produto utilizando o algoritmo indicado acima. Nesse exemplo, o primeiro número é x (equivale ao número **a** do algoritmo) e o segundo número é y (equivale ao número **b** do algoritmo). →

Primeiro número: x
Segundo número: y
O quadrado do primeiro número: $\mathbf{x^2}$
Menos duas vezes o primeiro número pelo segundo número: $\mathbf{- 2.x.y}$
O Quadrado do segundo número: $\mathbf{y^2}$ ↓

→ Juntando todos os termos, conforme indica o algoritmo, temos:

$\mathbf{x^2 - 2.x.y + y^2}$ → Resposta ↓

→ **ATENÇÃO**: só por uma questão de comparação de resultados, vamos desenvolver matematicamente o produto indicado:

$$(x - y)^2 = (x - y) . (x - y) = x. x - x. y - x. y + y .y = \mathbf{x^2 - 2. x. y + y^2}$$

Independentemente do método adotado, os resultados devem, obrigatoriamente, ser iguais entre si, não havendo, portanto, necessidade do desenvolvimento dos dois métodos.

---

b) $(a - 3x)^2 =$

Vamos desenvolver esse produto utilizando o algoritmo indicado acima. Nesse exemplo, o primeiro número é a (equivale ao número **a** do algoritmo) e o segundo número é 3x (equivale ao número **b** do algoritmo). →

Primeiro número: a
Segundo número: 3.x
O quadrado do primeiro número: $\mathbf{a^2}$
Menos duas vezes o primeiro número pelo segundo número: $- 2. a. 3.x = - 2. 3. a. x = \mathbf{- 6. a. x}$
O Quadrado do segundo número: $(3x)^2 = (3.x).(3.x) = 3.3. x . x = \mathbf{9x^2}$ ↓

→ Juntando todos os termos, conforme indica o algoritmo, temos:

$\mathbf{a^2 - 6ax + 9x^2}$ → Resposta ↓

→ **ATENÇÃO**: só por uma questão de comparação de resultados, vamos desenvolver matematicamente o produto indicado:

$$(a - 3x)^2 = (a - 3x) . (a - 3x) = a. a - 3.a. x - 3.a.x + 3x .3x = a^2 - 6.a.x + 3.3.x.x = \mathbf{a^2 - 6ax + 9x^2}$$

Independentemente do método adotado, os resultados devem, obrigatoriamente, ser iguais entre si, não havendo, portanto, necessidade do desenvolvimento dos dois métodos.

---

c) $(2x - 3y)^2 =$

Vamos desenvolver esse produto utilizando o algoritmo indicado acima. Nesse exemplo, o primeiro número é 2x (equivale ao número **a** do algoritmo) e o segundo número é 3y (equivale ao número **b** do algoritmo). →

Primeiro número: 2.x
Segundo número: 3.y
O quadrado do primeiro número: $(2x)^2 = (2x).(2x) = 2.2.x.x = \mathbf{4x^2}$
Menos duas vezes o primeiro número pelo segundo número: $- 2.2x. 3.y = 2. 2.3. x. y = \mathbf{- 12. x. y}$
O Quadrado do segundo número: $(3y)^2 = (3.y).(3.y) = 3.3. y . y = \mathbf{9y^2}$ ↓

→ Juntando todos os termos, conforme indica o algoritmo, temos:

$\mathbf{4x^2 - 12xy + 9y^2}$ → Resposta ↓

→ **ATENÇÃO**: só por uma questão de comparação de resultados, vamos desenvolver matematicamente o produto indicado:

$$(2x - 3y)^2 = (2x - 3y).(2x - 3y) = 2x.2x - 2x.3y - 2x.3y + 3y.3y = 2.2.x.x -2.3.x.y - 2.3.x.y + 3.3.y.y = 4x^2 - 6xy - 6xy + 9y^2 =$$

$$= \mathbf{4x^2 - 12xy + 9y^2}$$

Independentemente do método adotado, os resultados devem, obrigatoriamente, ser iguais entre si, não havendo, portanto, necessidade do desenvolvimento dos dois métodos.

EXERCÍCIOS:

1) Desenvolva os produtos notáveis indicados abaixo:

a) $(5x - 7a)^2 =$

$$\boxed{\mathbf{25x^2 - 70ax + 49a^2}}$$

b) $(3a - 4)^2 =$

$$\boxed{\mathbf{9a^2 - 24a + 16}}$$

c) $(7x - 3)^2 =$

$$\boxed{\mathbf{49x^2 - 42x + 9}}$$

d) $(6x - 5y)^2 =$

$$\boxed{\mathbf{36x^2 - 60xy + 25y^2}}$$

e) $(5x - 6y)^2 =$

$$\boxed{\mathbf{25x^2 - 60xy + 36y^2}}$$

III - PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA:

Podemos aplicar esse produto notável sempre que tivermos ***a soma de dois números multiplicada pela diferença entre esses mesmos dois números***.

Considerando os números a serem somados e subtraídos como sendo os números **a** e **b**, temos:

$$\boxed{(a + b).(a - b) = a.a - \cancel{a.b} + \cancel{a.b} - b.b = \mathbf{a^2 - b^2}}$$

Como o resultado se repete, esquematicamente, para quaisquer valores de **a** e de **b**, pode-se enunciar o algoritmo que nos fornece o resultado deste produto notável da seguinte maneira:

> O produto da soma de dois números quaisquer (**a** e **b**) pela diferença entre esses mesmos dois números é igual **a*o quadrado do primeiro número menos o quadrado do segundo número.***

Esse algoritmo pode ser aplicado para qualquer produto que se assemelhe as condições iniciais e nos fornece o resultado do produto sem que haja necessidade de multiplicarmos cada um dos termos entre si, dando agilidade e rapidez ao processo.

Vamos a alguns exemplos:

EXEMPLOS:

1) Desenvolva os produtos notáveis indicados abaixo:

a) $(x + y).(x - y) =$

Vamos desenvolver esse produto utilizando o algoritmo indicado acima. Nesse exemplo, o primeiro número é x (equivale ao número **a** do algoritmo) e o segundo número é y (equivale ao número **b** do algoritmo). →

Primeiro número: x
Segundo número: y
O quadrado do primeiro número: $\mathbf{x^2}$
O quadrado do segundo número: $\mathbf{y^2}$ ↓

→ Juntando todos os termos, conforme indica o algoritmo, temos:

$\mathbf{x^2 - y^2}$ → Resposta ↓

→ **<u>ATENÇÃO</u>**: só por uma questão de comparação de resultados, vamos desenvolver matematicamente o produto indicado:

$$(x + y).(x - y) = x.\ x - \cancel{x.\ y} + \cancel{x.\ y} - y\ .y = \mathbf{x^2 - y^2}$$

Independentemente do método adotado, os resultados devem, obrigatoriamente, ser iguais entre si, não havendo, portanto, necessidade do desenvolvimento dos dois métodos.

---

b) $(2x + 3y).(2x – 3y)=$

Vamos desenvolver esse produto utilizando o algoritmo indicado acima. Nesse exemplo, o primeiro número é 2x (equivale ao número **a** do algoritmo) e o segundo número é 3y (equivale ao número **b** do algoritmo). →

Primeiro número: 2x
Segundo número: 3y
O quadrado do primeiro número: $\mathbf{4x^2}$
O quadrado do segundo número: $\mathbf{9y^2}$ ↓

→ Juntando todos os termos, conforme indica o algoritmo, temos:

$4\mathbf{x^2 - 9y^2}$ → Resposta ↓

→ **<u>ATENÇÃO</u>**: só por uma questão de comparação de resultados, vamos desenvolver matematicamente o produto indicado:

$$(2x + 3y).(2x - 3y) = 2x.2x -.2x.3y + 3y.2x - 3y.3y = 2.2.x.x -2.3.x.y + 2.3.x.y -3.3.y.y = 4x^2 - \cancel{6xy} + \cancel{6xy} – 3.3.y.y = = \mathbf{4x^2 – 9y^2}$$

Independentemente do método adotado, os resultados devem, obrigatoriamente, ser iguais entre si, não havendo, portanto, necessidade do desenvolvimento dos dois métodos.

---

c) $(6 + 9y).(6 – 9y) =$

Vamos desenvolver esse produto utilizando o algoritmo indicado acima. Nesse exemplo, o primeiro número é 6 (equivale ao número **a** do algoritmo) e o segundo número é 9y (equivale ao número **b** do algoritmo). →

Primeiro número: 6
Segundo número: 9y
O quadrado do primeiro número: 6.6 = **36**
O quadrado do segundo número: $\mathbf{9y.9y = 9.9.y.y = 81y^2}$ ↓

→ Juntando todos os termos, conforme indica o algoritmo, temos:

$\mathbf{36 - 81y^2}$ → Resposta ↓

→ **<u>ATENÇÃO</u>**: só por uma questão de comparação de resultados, vamos desenvolver matematicamente o produto indicado:

$$(6 + 9y).(6 - 9y) = 6.6 -.6.9y + 6.9.y - 9y.9y = 36 - 54.y + 54.y – 9.9.y.y = 36 - \cancel{54y} + \cancel{54y} – 81.y^2 = = \mathbf{36 – 81y^2}$$

Independentemente do método adotado, os resultados devem, obrigatoriamente, ser iguais entre si, não havendo, portanto, necessidade do desenvolvimento dos dois métodos.

EXERCÍCIOS:

1) Efetue, utilizando os produtos notáveis:

a) $(3x + 2).(3x - 2) =$

$\boxed{\mathbf{9x^2 - 4}}$

b) $(2 - y).(2 + y) =$

$\boxed{4 - y^2}$

c) $(ab + 2x).(ab - 2x) =$

$\boxed{a^2b^2 - 4x^2}$

d) $(2x^2 + 3y).(2x^2 - 3y) =$

$\boxed{4x^4 - 9y^2}$

e) $(y - 3x^2).(y + 3x^2) =$

$\boxed{y^2 - 9x^4}$

2) Efetue:

a) $(x - 2)^2 + x^2 - 2.(x - 1)^2 =$

$\boxed{2}$

b) $(2x - y)^2 - 2.(x^2 + y^2) - (x + 2)^2 + 4x.(y + 1) =$

$\boxed{x^2 - y^2 - 4}$

FATORAÇÃO DE POLINÔMIOS:

Da mesma maneira que fizemos com números, podemos fatorar polinômios para descobrir quais são os termos em comum existentes nele. Numa fração onde o numerador e o denominador são polinômios, fatorar tais polinômios é essencial para que a fração possa ser simplificada.

Vamos aos exemplos:

EXEMPLOS:

1) Fatorar os polinômios abaixo:

a) $mx + my =$

Para fatorar um polinômio, deve-se identificar quais termos são comuns em cada uma das suas parcelas.
No polinômio apresentado, fica fácil visualizar que o termo comum é **m**.

→

Uma vez descoberto o(s) termo(s) comum(ns), vamos escrever esse(s) termo(s) e vamos dividir o polinômio original pelo termo comum, escrevendo o resultado da divisão entre parênteses, multiplicando o termo comum.
Assim, temos:

Termo comum: **m**
Divisão do primeiro termo (mx) pelo termo comum: $\frac{\cancel{m}x}{\cancel{m}} = \mathbf{x}$
Divisão do segundo termo (my) pelo termo comum: $\frac{\cancel{m}y}{\cancel{m}} = \mathbf{y}$

↓

Vamos agora escrever o produto do termo comum pelo resultado das divisões, entre parênteses:
m.(x + y) → Resultado da Fatoração do polinômio

↓

ATENÇÃO: se desenvolvermos o produto apresentado, devemos, ***OBRIGATORIAMENTE***, obter o polinômio original:

m.(x + y) = **mx + my**

---

b) $3x - 6y =$

Para fatorar um polinômio, deve-se identificar quais termos são comuns em cada uma das suas parcelas.
No polinômio apresentado, podemos decompor 6 em números primos, obtendo o produto de 2 e 3. Assim, fica fácil visualizar que o termo comum é **3**.

$3x - 6y = 3x - 2.3.y$

→

Uma vez descoberto o(s) termo(s) comum(ns), vamos escrever esse(s) termo(s) e vamos dividir o polinômio original pelo termo comum, escrevendo o resultado da divisão entre parênteses, multiplicando o termo comum.
Assim, temos:
Termo comum: **3**
Divisão do primeiro termo (3x) pelo termo comum: $\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \mathbf{x}$
Divisão do segundo termo (my) pelo termo comum: $\frac{2.\cancel{3}.y}{\cancel{3}} = \mathbf{2y}$

↓

→ Vamos agora escrever o produto do termo comum pelo resultado das divisões, entre parênteses:
3.(x - 2y) → Resultado da Fatoração do polinômio

ATENÇÃO: se desenvolvermos o produto apresentado, devemos, ***OBRIGATORIAMENTE***, obter o polinômio original:

3.(x - 2y) = 3x – 3.2.y = **3x – 6y**

---

c) $7mx + 21m^2x =$

Para fatorar um polinômio, deve-se identificar quais termos são comuns em cada uma das suas parcelas.
No polinômio apresentado, podemos decompor 21 em números primos, obtendo o produto de 3 e 7. Além disso, m^2 pode ser escrito como m.m.
Assim, fica fácil visualizar que o termo comum é **:**

$7mx + 21m^2x = \boxed{7mx} + 3.\boxed{7}.\boxed{m}.m.\boxed{x}$

→

Uma vez descoberto o(s) termo(s) comum(ns), vamos escrever esse(s) termo(s) e vamos dividir o polinômio original pelo termo comum, escrevendo o resultado da divisão entre parênteses, multiplicando o termo comum.
Assim, temos:
Termo comum: **7mx**
Divisão do primeiro termo (7mx) pelo termo comum: $\frac{\cancel{7mx}}{\cancel{7mx}} = \mathbf{1}$
Divisão do 2º termo (3.7.m.m.x) pelo termo comum: $\frac{3.\cancel{7}.\cancel{m}.m.\cancel{x}}{\cancel{7}.\cancel{m}.\ \cancel{x}} = \mathbf{3m}$

↓

→ Vamos agora escrever o produto do termo comum pelo resultado das divisões, entre parênteses:
7.m.x.(1 + 3m) → Resultado da Fatoração do polinômio

ATENÇÃO: se desenvolvermos o produto apresentado, devemos, ***OBRIGATORIAMENTE***, obter o polinômio original:

$7.m.x.(1 + 3m) = 7.m.x.1 + 7.m.x.3.m = 7.m.x + 7.3.m.m.x =$ $\mathbf{7mx + 21m^2x}$

---

d) $3 – 9x^2 – 12x =$

Para fatorar um polinômio, deve-se identificar quais termos são comuns em cada uma das suas parcelas.
No polinômio apresentado, podemos decompor 9 em números primos, obtendo o produto de 3 e 3. Além disso, 12 pode ser escrito como 3.4.
Assim, fica fácil visualizar que o termo comum é **:**

$3 - 9x^2 – 12x = \boxed{3} – \boxed{3}.3.x^2 – \boxed{3}.4.x$

→

Uma vez descoberto o(s) termo(s) comum(ns), vamos escrever esse(s) termo(s) e vamos dividir o polinômio original pelo termo comum, escrevendo o resultado da divisão entre parênteses, multiplicando o termo comum.
Assim, temos:
Termo comum: **3**
Divisão do primeiro termo (3) pelo termo comum: $\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}} = \mathbf{1}$
Divisão do 2º termo (-3.3.x.x) pelo termo comum: $- \frac{3.\cancel{3}.x.x}{\cancel{3}} = \mathbf{3x^2}$
Divisão do 3º termo (3.4.x) pelo termo comum: $\frac{\cancel{3}.4.x}{\cancel{3}} = \mathbf{4x}$

↓

→ Vamos agora escrever o produto do termo comum pelo resultado das divisões, entre parênteses:
$\mathbf{3.(1 - 3x^2 - 4x)}$ → Resultado da Fatoração do polinômio

ATENÇÃO: se desenvolvermos o produto apresentado, devemos, ***OBRIGATORIAMENTE***, obter o polinômio original:

$3.(1 - 3x^2 - 4x) = 3.1 – 3.3.x^2 – 3.4.x =$ $\mathbf{3 - 9x^2 - 12x}$

2) Efetue:

a) $\frac{2ax + ay}{6x + 3y} =$

Para efetuarmos essa divisão de frações, devemos fatorar, separadamente, o numerador e o denominador da fração para acharmos o fator comum a ambos.
Após isso, os fatores comuns entre o numerador e o denominador poderão ser simplificados facilmente.
Assim, temos:

Numerador → $2\boxed{a}x + \boxed{a}y$ → Fator comum → **a**

Denominador → $2.\boxed{3}x + \boxed{3}.y$ → Fator comum → **3**

→

Vamos agora fatorar o numerador e o denominador separadamente:

Numerador → 2ax+ ay = **a.(2x + y)**

Denominador → 6x + 3y = **3.(2x + y)**

↓

→

Agora vamos juntar o numerador e o denominador, já fatorados, na forma de fração, indicada no exercício. Fazendo isso, podemos visualizar se existem termos comuns ao numerador e ao denominador simultaneamente e, caso existam, poderemos realizar a simplificação dos termos comuns a ambos.
Assim, temos:

$\frac{a.\cancel{(2x + y)}}{3.\cancel{(2x + y)}}$ → como (2x + y) aparece no numerador e no denominador, podemos simplificar estes termos

Após a simplificação, sobram: $\frac{a.\cancel{(2x + y)}}{3.\cancel{(2x + y)}} = \boxed{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{3}}}$ → RESPOSTA

ATENÇÃO: A resolução apresentada acima foi feita em partes para o aluno entender cada uma das etapas da resolução. Matematicamente, a resolução formal dessa racionalização é apresentada a seguir:

$$\frac{2ax + ay}{6x + 3y} = \frac{a.\cancel{(2x + y)}}{3.\cancel{(2x + y)}} = \boxed{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{3}}}$$ → Resposta

---

b) $\frac{4xy + 2y}{12x + 6} =$

Para efetuarmos essa divisão de frações, devemos fatorar, separadamente, o numerador e o denominador da fração para acharmos o fator comum a ambos.
Após isso, os fatores comuns entre o numerador e o denominador poderão ser simplificados facilmente.
Assim, temos:

Numerador → $2.\boxed{2}.x.\boxed{y} + \boxed{2y}$ → Fator comum → **2y**

Denominador → $2.\boxed{2.3}x + \boxed{2.3}$ → Fator comum → **2.3**

→

Vamos agora fatorar o numerador e o denominador separadamente:

Numerador → 4xy+ 2y = **2y.(2x + 1)**

Denominador → 2.2.3x + 2.3 = **2.3.(2x + 1)**

↓

→

Agora vamos juntar o numerador e o denominador, já fatorados, na forma de fração, indicada no exercício. Fazendo isso, podemos visualizar se existem termos comuns ao numerador e ao denominador simultaneamente e, caso existam, poderemos realizar a simplificação dos termos comuns a ambos.
Assim, temos:

$\frac{\cancel{2}.y.\cancel{(2x + 1)}}{\cancel{2}.3.\cancel{(2x + 1)}}$ → como 2.(2x + 1) aparece no numerador e no denominador, podemos simplificar estes termos

Após a simplificação, sobram: $\frac{\cancel{2}.y.\cancel{(2x + 1)}}{\cancel{2}.3.\cancel{(2x + 1)}} = \boxed{\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{3}}}$ → RESPOSTA

ATENÇÃO: A resolução apresentada acima foi feita em partes para o aluno entender cada uma das etapas da resolução. Matematicamente, a resolução formal dessa racionalização é apresentada a seguir:

$$\frac{4.x.y + 2.y}{2.2.3x + 2.3} = \frac{\cancel{2}y.\cancel{(2x + 1)}}{\cancel{2}.3.\cancel{(2x + 1)}} = \boxed{\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{3}}}$$ → Resposta

c) $\dfrac{3ax + 6a}{x + 2} =$

Para efetuarmos essa divisão de frações, devemos fatorar, separadamente, o numerador e o denominador da fração para acharmos o fator comum a ambos.
Após isso, os fatores comuns entre o numerador e o denominador poderão ser simplificados facilmente.
Assim, temos:

Numerador → $\boxed{3.a}x + 2.\boxed{3.a}$ → Fator comum → **3a**

Denominador→ x + 2 → Fator comum → **não há**

→

Vamos agora fatorar o numerador e o denominador separadamente:

Numerador → 3.a.x + 2.3.a = **3a.(x + 2)**

Denominador → x + 2 = **(x + 2)**

↓

→ Agora vamos juntar o numerador e o denominador, já fatorados, na forma de fração, indicada no exercício. Fazendo isso, podemos visualizar se existem termos comuns ao numerador e ao denominador simultaneamente e, caso existam, poderemos realizar a simplificação dos termos comuns a ambos.
Assim, temos:

$\dfrac{3.a.\cancel{(x + 2)}}{\cancel{(x + 2)}}$ → como (x +2) aparece no numerador e no denominador, podemos simplificar estes termos

Após a simplificação, sobram: $\dfrac{3.a.\cancel{(x + 2)}}{\cancel{(x + 2)}} = \boxed{3a}$ → RESPOSTA

ATENÇÃO: A resolução apresentada acima foi feita em partes para o aluno entender cada uma das etapas da resolução. Matematicamente, a resolução formal dessa racionalização é apresentada a seguir:

$$\frac{3.a.x + 6.a}{x + 2} = \frac{3.a.x + 2.3.a}{x + 2} = \frac{3.a.\cancel{(x + 2)}}{\cancel{(x + 2)}} = \boxed{3a} \rightarrow \text{ Resposta}$$

EXERCÍCIOS:

1) Efetue:

a) $\dfrac{6x^4y^5}{4x^3y^6} =$

$\boxed{\dfrac{3x}{2y}}$

b) $\dfrac{ax^2 - ay^2}{a^2x + a^2y} =$

$\boxed{\dfrac{x - y}{a}}$

c) $\dfrac{18a^5y^4}{27a^3y^5} =$

$\boxed{\dfrac{2a^2}{3y}}$

d) $\dfrac{am + bm}{3a + 3b} =$

$\boxed{\dfrac{m}{3}}$

e) $\dfrac{4a - 10b}{6a - 15b} =$

$\boxed{\dfrac{2}{3}}$

f) $\dfrac{6ax + 6x}{12x} =$

$\boxed{\dfrac{a + 1}{2}}$

EQUAÇÕES:

Podemos chamar de Equação Matemática (ou simplesmente de Equação) a todo conjunto de números e/ou símbolos matemáticos que se encontram separados por um sinal de igual (**=**). Assim, toda vez que existirem elementos à esquerda e também à direita de um sinal de igual, teremos uma Equação, do ponto de vista da Matemática.

São vários os tipos de Equações que existem e cada um dos tipos de Equação pode possuir uma técnica de resolução bastante diferenciada de outra equação. Vamos abordar aqui, basicamente, dois tipos de Equação fundamentais e de grande utilização na Matemática, na Física e também na Química, que são as ***Equações do Primeiro Grau*** e as ***Equações do Segundo Grau***.

O Grau de uma Equação matemática está diretamente associado ao maior valor do expoente que aparece nas incógnitas da equação. Assim, se o maior expoente apresentado for igual a um, ela será uma Equação do 1º Grau, se o maior expoente apresentado na incógnita for igual a dois, a Equação será do Segundo Grau e assim sucessivamente.

EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU:

As Equações do Primeiro Grau são as equações matemáticas que apresentam a resolução mais simples e rápida. Em geral, basta apenas isolarmos a incógnita da equação e descobrir o seu valor numérico.

Isolar uma incógnita significa que vamos deixar somente ela de um dos lados do sinal de igual (=) e todo o resto dos termos (números, símbolos, letras, etc,) deverão ser "deslocados" matematicamente para o outro lado do sinal de igual.

Para mudar um termo qualquer de uma equação de um lado do sinal de igual para o outro lado ***é necessário sempre que o termo sofra uma inversão na operação matemática***, ou seja:

Se ele esta ***somando***, passará para o outro lado da igualdade ***diminuindo***;
Se ele está ***diminuindo***, passará para o outro lado da igualdade ***somando***;
Se ele está ***multiplicando***, passará para o outro lado da igualdade ***dividindo***;
Se ele está ***dividindo***, passará para o outro lado da igualdade ***multiplicando***.

Resolver uma equação significa que vamos encontrar o valor da incógnita existente na equação. A incógnita pode ser representada por qualquer letra do alfabeto, por exemplo. Os símbolos mais utilizados como incógnitas na Matemática são x, y, z, a, b, c. Mas, enfatizamos, a incógnita pode ser representada por ***qualquer letra do alfabeto ou por qualquer símbolo matemático*** que se queira.

Vamos aos exercícios para entender a técnica de resolução das Equações do Primeiro Grau.

EXERCÍCIOS:

1) Resolva as Equações indicadas abaixo:

a) $x + 3 = 2$

Esta é uma Equação do 1º Grau, pois o maior expoente de x é 1.
Para resolver esta equação, devemos isolar matematicamente o valor da incógnita, que neste caso é **x**.
Assim, o número 3 que está somando deverá passar para o outro lado, diminuindo:

$x + 3 = 2 \rightarrow x = 2 - 3 \rightarrow \boxed{x = -1} \rightarrow$ **RESPOSTA**

A resposta obtida acima nos indica que o valor de x é igual -1, ou seja, o valor da incógnita é igual a menos 1. Esse é o valor que satisfaz a equação acima.
Para verificarmos isso, basta substituir o valor obtido para x na equação fornecida. Assim temos:

$x + 3 = 2$
$-1 + 3 = 2$
$\boxed{2 = 2} \rightarrow$ Portanto **x = -1** satisfaz a Equação.

---

b) $x - 1 = 5$

Esta é uma Equação do 1º Grau, pois o maior expoente de x é 1.
Para resolver esta equação, devemos isolar matematicamente o valor da incógnita, que neste caso é **x**.
Assim, o número 1 que está diminuindo deverá passar para o outro lado somando:

$x - 1 = 5 \rightarrow x = 5 + 1 \rightarrow \boxed{x = 6} \rightarrow$ **RESPOSTA**

A resposta obtida acima nos indica que o valor de x é igual 6, ou seja, o valor da incógnita é igual a seis. Esse é o valor que satisfaz a equação acima.
Para verificarmos isso, basta substituir o valor obtido para x na equação fornecida. Assim temos:

$x - 1 = 5$
$6 - 1 = 5$
$\boxed{5 = 5} \rightarrow$ Portanto **x = 6** satisfaz a Equação.

c) $2x + 1 = 5$

Esta é uma Equação do 1º Grau, pois o maior expoente de x é 1.
Para resolver esta equação, devemos isolar matematicamente o valor da incógnita, que neste caso é **x**.
Assim, o número 1 que está somando deverá passar para o outro lado diminuindo:

$$2x + 1 = 5 \rightarrow 2x = 5 - 1 \rightarrow 2x = 4$$

Agora, o número 2 que está multiplicando x deverá passar para o outro lado dividindo.

$$2x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{2} \rightarrow \boxed{x = 2} \rightarrow \textbf{RESPOSTA}$$

A resposta obtida acima nos indica que o valor de x é igual 2, ou seja, o valor da incógnita é igual a dois. Esse é o valor que satisfaz a equação acima.
Para verificarmos isso, basta substituir o valor obtido para x na equação fornecida. Assim temos:

$$2x + 1 = 5$$
$$2 \cdot 2 + 1 = 5$$
$$4 + 1 = 5$$
$$\boxed{5 = 5} \rightarrow$$ Portanto **x = 2** satisfaz a Equação

---

d) $3y - 2 = 7$

Esta é uma Equação do 1º Grau, pois o maior expoente de y é 1.
Para resolver esta equação, devemos isolar matematicamente o valor da incógnita, que neste caso é **y**.
Assim, o número 2 que está diminuindo deverá passar para o outro lado somando:

$$3y - 2 = 7 \rightarrow 3y = 7 + 2 \rightarrow 3y = 9$$

Agora, o número 3 que está multiplicando y deverá passar para o outro lado dividindo.

$$3y = 9 \rightarrow y = \frac{9}{3} \rightarrow \boxed{y = 3} \rightarrow \textbf{RESPOSTA}$$

A resposta obtida acima nos indica que o valor de y é igual 3, ou seja, o valor da incógnita é igual a três. Esse é o valor que satisfaz a equação acima.
Para verificarmos isso, basta substituir o valor obtido para y na equação fornecida. Assim temos:

$$3y - 2 = 7$$
$$3 \cdot 3 - 2 = 7$$
$$9 - 2 = 7$$
$$\boxed{7 = 7} \rightarrow$$ Portanto **y = 3** satisfaz a Equação

---

e) $2y - 1 = 6$

Esta é uma Equação do 1º Grau, pois o maior expoente de y é 1.
Para resolver esta equação, devemos isolar matematicamente o valor da incógnita, que neste caso é **y**.
Assim, o número 1 que está diminuindo deverá passar para o outro lado somando:

$$2y - 1 = 6 \rightarrow 2y = 6 + 1 \rightarrow 2y = 7$$

Agora, o número 2 que está multiplicando y deverá passar para o outro lado dividindo.

$$2y = 7 \rightarrow \boxed{y = \frac{7}{2}} \rightarrow \textbf{RESPOSTA}$$

A resposta obtida acima nos indica que o valor de y é igual 7/2, ou seja, o valor da incógnita é igual a sete meios. Esse é o valor que satisfaz a equação acima.
Para verificarmos isso, basta substituir o valor obtido para x na equação fornecida. Assim temos:

$$2\,y - 1 = 6$$
$$\cancel{2} \cdot \frac{7}{\cancel{2}} - 1 = 6$$
$$7 - 1 = 6$$
$$\boxed{6 = 6} \rightarrow$$ Portanto **y =** $\mathbf{\frac{7}{2}}$ satisfaz a Equação

---

f) $10x + 6 - 3x = 8$

Esta é uma Equação do 1º Grau, pois o maior expoente de x é 1.
Para resolver esta equação, devemos isolar matematicamente o valor da incógnita, que neste caso é **x**.
Assim, o número 6 que está somando deverá passar para o outro lado diminuindo:

$$10x + 6 - 3x = 8 \rightarrow 10x - 3x = 8 - 6 \rightarrow 7x = 2$$

Agora, o número 7 que está multiplicando x deverá passar para o outro lado dividindo.

$7x = 2 \rightarrow \boxed{x = \frac{2}{7}} \rightarrow$ **RESPOSTA**

A resposta obtida acima nos indica que o valor de x é igual 2/7, ou seja, o valor da incógnita é igual a dois sétimos. Esse é o valor que satisfaz a equação acima.
Para verificarmos isso, basta substituir o valor obtido para x na equação fornecida. Assim temos:

$$10 \cdot x + 6 - 3 \cdot x = 8$$
$$10 \cdot \frac{2}{7} + 6 - 3 \cdot \frac{2}{7} = 8$$
$$\frac{20}{7} + 6 - \frac{6}{7} = 8$$
$$\frac{20.1 + 6.7 - 6.1}{7} = 8$$
$$\frac{20 + 42 - 6}{7} = 8$$
$$\frac{56}{7} = 8$$

$\boxed{8 = 8} \rightarrow$ Portanto **x = 2/7** satisfaz a Equação

---

EXERCÍCIOS:

1) Resolva as Equações abaixo:

a) $4x - 7 = 1$ $\boxed{x = 2}$

b) $x + 2 = 5$ $\boxed{x = 3}$

c) $2y - 4 = 2$ $\boxed{y = 3}$

d) $2a + 4 = -6$ $\boxed{a = -5}$

e) $-2 + 5y = 13$ $\boxed{y = 3}$

f) $x + 1 = 3$ $\boxed{x = 4}$

g) $2x - 3 = 8$ $\boxed{x = \frac{11}{2}}$

h) $4 - 9x = 2$ $\boxed{x = \frac{2}{9}}$

i) $3z - 7 = 12$ $\boxed{z = \frac{19}{3}}$

j) $10 - 5x = -6x + 8$ $\boxed{x = -2}$

k) $2x + 6 = -3x + 1$ $\boxed{x = -1}$

l) $2y - 5 = 1 - 4y$ $\boxed{y = 1}$

m) $15y - 2 + 3y = 7$ $\boxed{y = \frac{1}{2}}$

n) $-2 + 3x + 2 = 3$ $\boxed{x = 1}$

o) $6y - 1 + 2y = 7y$ $\boxed{y = 1}$

GRÁFICOS DE UMA EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU:

Para toda e qualquer equação, podemos construir gráficos, de vários tipos, que representarão visualmente como ocorrem as variações das incógnitas. Para a construção desses gráficos vamos utilizar o ***Plano Cartesiano*** (x,y).

No caso específico de uma ***Equação do Primeiro Grau, toda a representação através de gráficos produzirá, obrigatoriamente, uma linha reta.*** Conforme o tipo de equação e a relação entre as variáveis, pode-se apenas variar a inclinação da reta em relação ao eixo x, por exemplo.

Para construir o gráfico de uma equação do primeiro grau, vamos atribuir valores aleatórios para a incógnita num dos eixos (x, por exemplo) e vamos calcular os valores correspondentes para o outro eixo (y, por exemplo). Cada conjunto de valores de x e de y corresponderá a um ponto do plano cartesiano e será marcado no gráfico. Quando tivermos um conjunto de pontos, traçaremos uma linha que os unirá, construindo o gráfico respectivo da equação apresentada.

Vamos aos exemplos:

EXEMPLOS:

1) Utilizando o Plano Cartesiano, construa os gráficos das equações abaixo:

a) $y = 2x - 1$

Para descobrirmos os pontos a serem marcados no plano cartesiano (x,y), vamos escolher aleatoriamente valores para x e vamos substituí-los na equação apresentada para calcular o valor correspondente a y. Podemos, depois, montar uma tabela com os resultados para facilitar a visualização dos pontos.
Os valores escolhidos para x serão: -2, -1, 0, 1, 2
Substituindo cada um desses valores na equação, temos:

$\boxed{x = -2} \rightarrow y = 2x - 1 \rightarrow y = 2.(-2) - 1 \rightarrow y = -4 - 1 \rightarrow \mathbf{y = -5}$

$\boxed{x = -1} \rightarrow y = 2x - 1 \rightarrow y = 2.(-1) - 1 \rightarrow y = -2 - 1 \rightarrow \mathbf{y = -3}$

$\boxed{x = 0} \rightarrow y = 2x - 1 \rightarrow y = 2.(0) - 1 \rightarrow y = 0 - 1 \rightarrow \mathbf{y = -1}$

$\boxed{x = 1} \rightarrow y = 2x - 1 \rightarrow y = 2.(1) - 1 \rightarrow y = 2 - 1 \rightarrow \mathbf{y = 1}$

$\boxed{x = 2} \rightarrow y = 2x - 1 \rightarrow y = 2.(2) - 1 \rightarrow y = 4 - 1 \rightarrow \mathbf{y = 3}$

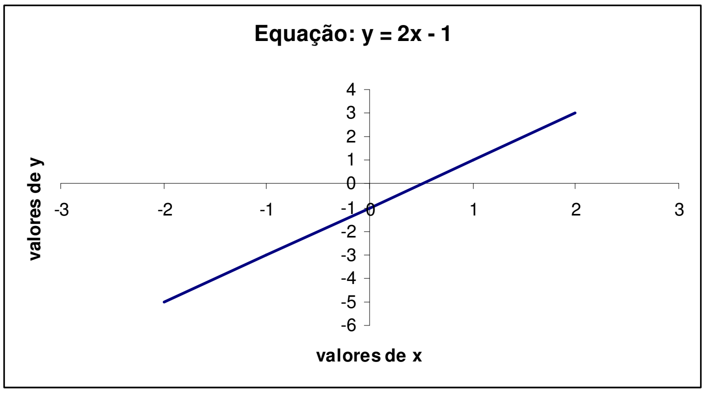
→

Podemos agora montar uma Tabela para facilitar a montagem dos pontos a serem colocados no plano cartesiano.

x	y
- 2	- 5
- 1	- 3
0	- 1
1	1
2	3

Agora vamos colocar esses pontos no plano Cartesiano (x,y).

↓ ↓ ↓ ↓



→

Como a equação y = 2x – 1 é uma equação do primeiro grau, o gráfico correspondente é uma ***LINHA RETA.***

b) y = - 3x + 2

Para descobrirmos os pontos a serem marcados no plano cartesiano (x,y), vamos escolher aleatoriamente valores para x e vamos substituí-los na equação apresentada para calcular o valor correspondente a y. Podemos, depois, montar uma tabela com os resultados para facilitar a visualização dos pontos.
Os valores escolhidos para x serão: -2, -1, 0, 1, 2
Substituindo cada um desses valores na equação, temos:

$\boxed{x = -2}$ → y = -3x + 2 → y = -3.(-2) + 2 → y = 6 +2 → **y = 8**

$\boxed{x = -1}$ → y = -3x + 2 → y = -3.(-1) + 2 → y = 3 +2 → **y = 5**

$\boxed{x = 0}$ → y = -3x + 2 → y = -3.(0) + 2 → y = 0 + 2 → **y = 2**

$\boxed{x = 1}$ → y = -3x + 2 → y = -3.(1) + 2 → y = - 3 + 2 → **y = -1**

$\boxed{x = 2}$ → y = -3x + 2 → y = -3.(2) + 2 → y = -6 + 2 → **y = -4**

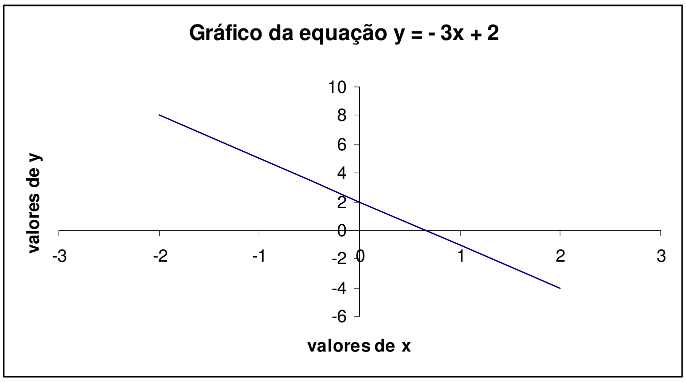
→

Podemos agora montar uma Tabela para facilitar a montagem dos pontos a serem colocados no plano cartesiano.

x	y
- 2	8
- 1	5
0	2
1	- 1
2	- 4

Agora vamos colocar esses pontos no plano Cartesiano (x,y).

↓ ↓ ↓ ↓



→

Como a equação y = 2x – 1 é uma equação do primeiro grau, o gráfico correspondente é uma ***LINHA RETA.***

<u>SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU (COM DUAS INCÓGNITAS):</u>

Em Matemática e Física é comum possuirmos mais de uma incógnita numa Equação. Nesse caso, se temos duas incógnitas, devemos ter duas equações que as envolvam simultaneamente. Se tivermos três incógnitas, devemos ter três equações que as envolvam simultaneamente e assim por diante.

Quando possuirmos duas incógnitas e duas equações que as envolvam, podemos resolver o sistema formado pelas duas equações para descobrir o valor de cada uma das incógnitas.

Em geral, podemos resolver sistemas que envolvem mais de duas equações (e, portanto, mais de duas incógnitas), porém a dificuldade cresce junto com o número de equações utilizadas.

Vamos apresentar abaixo um dos métodos que podem ser utilizados para resolver sistemas de equações com apenas duas incógnitas.

<u>EXEMPLOS:</u>

1) Resolva os sistemas abaixo e encontre o valor de **x** e **y** em cada caso:

a) $\begin{cases} x+y=10 \\ 2x-y=8 \end{cases}$

Analisando as equações separadamente, podemos perceber que a equação de cima apresenta duas incógnitas: **x** e **y**
Analisando a equação de baixo, podemos perceber que a equação apresenta duas incógnitas também: **x** e **y**.
Como temos duas incógnitas envolvidas, devemos ter duas equações que envolvam as incógnitas **x** e **y**.
Como temos duas equações e duas incógnitas, podemos resolver um sistema que envolverá essas duas equações. Assim, poderemos calcular os valores de x e de y separadamente.

↓

Em geral, para começarmos a resolver o sistema, devemos analisar as equações para verificar se, ao somarmos as duas equações, uma das incógnitas não será anulada, desaparecendo e permitindo que se calcule o valor numérico da outra incógnita.
No exemplo dado, fica fácil perceber que se somarmos as duas equações a incógnita y será cancelada, restando apenas o valor de x para calcularmos com facilidade.

↓

Vamos então efetuar a soma das equações que fazem parte do sistema:

$$\begin{cases} x+\cancel{y}=10 \\ 2x-\cancel{y}=8 \end{cases}$$

$\boxed{x + 2x = 10 + 8}$ → Resolvendo → x + 2x = 10 + 8

3.x = 18

$x = \frac{18}{3}$

Esse é o valor da incógnita x ← $\boxed{x = 6}$

↓

Agora que já sabemos o valor numérico de **x**, podemos calcular facilmente o valor de **y**. Para calcular y, basta escolhermos qualquer uma das equações apresentadas no exemplo e substituir o valor de x por seis. Assim, temos:

Se escolhermos a equação de cima: x + y = 10 → $\boxed{x = 6}$

6 + y = 10

y = 10 – 6

Esse é o valor da incógnita y ← $\boxed{y = 4}$

Se escolhermos a equação de baixo: 2x - y = 8 → $\boxed{x = 6}$

2.6 - y = 8

12 - y = 8

- y = 8 – 12

- y = - 4 → multiplicando por (- 1)

Esse é o valor da incógnita y ← $\boxed{y = 4}$

<u>ATENÇÃO</u>: não existe a necessidade de calcular y utilizando as duas equações. Você pode utilizar a equação de cima ***<u>OU</u>*** a equação de baixo, pois, como vimos, as duas fornecem o ***<u>mesmo</u>*** resultado.

---

b) $\begin{cases} x+y=8 \\ 4x-6y=12 \end{cases}$

Analisando as equações separadamente, podemos perceber que a equação de cima apresenta duas incógnitas: **x** e **y**
Analisando a equação de baixo, podemos perceber que a equação apresenta duas incógnitas também: **x** e **y**.
Como temos duas incógnitas envolvidas, devemos ter duas equações que envolvam as incógnitas **x** e **y**.
Como temos duas equações e duas incógnitas, podemos resolver um sistema que envolverá essas duas equações. Assim, poderemos calcular os valores de x e de y separadamente.

↓

Em geral, para começarmos a resolver o sistema, devemos analisar as equações para verificar se, ao somarmos as duas equações, uma das incógnitas não será anulada, desaparecendo e permitindo que se calcule o valor numérico da outra incógnita.
No exemplo dado, fica fácil perceber que se somarmos as duas equações a incógnita y não será cancelada. Devemos, então, utilizar um artifício matemático para forçar o cancelamento da incógnita y (ou x, tanto faz). Tal artifício constitui-se em multiplicar, separadamente, a(s) equação(ões) apresentada(as) inicialmente por um número tal que permita o cancelamento de uma das incógnitas (y, por exemplo).

↓

Analisando as equações apresentadas, pode-se perceber que se multiplicarmos apenas a equação de cima por 6, quando somarmos as duas equações a incógnita y será cancelada. Assim, temos:

$$\begin{cases} x+y=8 \\ 4x-6y=12 \end{cases} \rightarrow 6.\begin{cases} x+y=8 \\ 4x-6y=12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x+\cancel{6y}=48 \\ 4x-\cancel{6y}=12 \end{cases}$$

6x + 4x = 48 + 12 → Resolvendo → 6x+4x = 48 + 12

10.x = 60

$x = \frac{60}{10}$

Esse é o valor da incógnita x. ← **x = 6**

<u>É apenas uma coincidência a resposta deste exemplo ser igual à do exemplo anterior.</u>

↓

Agora que já sabemos o valor numérico de **x**, podemos calcular facilmente o valor de **y**. Para calcular y, basta escolhermos qualquer uma das equações apresentadas no exemplo e substituir o valor de x por seis. Assim, temos:

Se escolhermos a equação de cima: x + y = 8 → **x = 6**

6 + y = 8

y = 8 – 6

Esse é o valor da incógnita y ← **y = 2**

Se escolhermos a equação de baixo: 4x - 6y = 12 → **x = 6**

4.6 - 6y = 12

24 - 6y = 12

- 6y = 12 – 24

- 6y = - 12

$y = \frac{-12}{-6}$

Esse é o valor da incógnita y ← **y = 2**

<u>ATENÇÃO</u>: não existe a necessidade de calcular y utilizando as duas equações. Você pode utilizar a equação de cima ***<u>OU</u>*** a equação de baixo, pois as duas fornecem o ***<u>mesmo</u>*** resultado.

---

c) $\begin{cases} 3x-5y=6 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$

Analisando as equações separadamente, podemos perceber que a equação de cima apresenta duas incógnitas: **x** e **y**
Analisando a equação de baixo, podemos perceber que a equação apresenta duas incógnitas também: **x** e **y**.
Como temos duas incógnitas envolvidas, devemos ter duas equações que envolvam as incógnitas **x** e **y**.
Como temos duas equações e duas incógnitas, podemos resolver um sistema que envolverá essas duas equações. Assim, poderemos calcular os valores de x e de y separadamente.

↓

Em geral, para começarmos a resolver o sistema, devemos analisar as equações para verificar se, ao somarmos as duas equações, uma das incógnitas não será anulada, desaparecendo e permitindo que se calcule o valor numérico da outra incógnita.
No exemplo dado, fica fácil perceber que se somarmos as duas equações a incógnita y não será cancelada. Devemos, então, utilizar um artifício matemático para forçar o cancelamento da incógnita y (ou x, tanto faz). Tal artifício constitui-se em multiplicar, separadamente, a(s) equação(ões) apresentada(as) inicialmente por um número tal que permita o cancelamento de uma das incógnitas (y, por exemplo).

↓

Analisando as equações apresentadas, pode-se perceber que se multiplicarmos a equação de cima por 2 (que é o coeficiente de y na equação de baixo) e a equação de baixo por 5 (que é o coeficiente de y na equação de cima), quando somarmos as duas equações a incógnita y será cancelada. Assim, temos:

$$\begin{cases}3x-5y=6\\2x+2y=4\end{cases} \rightarrow \begin{matrix}2.\\5\end{matrix}\begin{cases}3x-5y=6\\2x+2y=4\end{cases} \rightarrow \begin{cases}6x-\cancel{10y}=12\\10x+\cancel{10y}=20\end{cases}$$

6x +10x = 12 + 20 → Resolvendo → 6x+10x=12+20

16.x = 32

$x = \frac{32}{16}$

Esse é o valor da incógnita x. ← **x = 2**

↓

Agora que já sabemos o valor numérico de **x**, podemos calcular facilmente o valor de **y**. Para calcular y, basta escolhermos qualquer uma das equações apresentadas no exemplo e substituir o valor de x por dois. Assim, temos:

Se escolhermos a equação de cima: 3.x - 5y = 6 → **x = 2**

3.2 - 5y = 6

6 – 5y = 6

- 5y = 6 - 6

- 5y = 0

$y = \frac{0}{-5}$

Esse é o valor da incógnita y ← **y = 0**

Se escolhermos a equação de baixo: 2x + 2y = 4 → **x = 2**

2.2 + 2y = 4

4 + 2y = 4

2y = 4 – 4

2y = 0

$y = \frac{0}{2}$

Esse é o valor da incógnita y ← **y = 0**

<u>ATENÇÃO</u>: não existe a necessidade de calcular y utilizando as duas equações. Você pode utilizar a equação de cima ***<u>OU</u>*** a equação de baixo, pois as duas fornecem o ***<u>mesmo</u>*** resultado.

---

d) $\begin{cases}7x-4y=10\\3x+5y=11\end{cases}$

Analisando as equações separadamente, podemos perceber que a equação de cima apresenta duas incógnitas: **x** e **y**
Analisando a equação de baixo, podemos perceber que a equação apresenta duas incógnitas também: **x** e **y**.
Como temos duas incógnitas envolvidas, devemos ter duas equações que envolvam as incógnitas **x** e **y**.
Como temos duas equações e duas incógnitas, podemos resolver um sistema que envolverá essas duas equações. Assim, poderemos calcular os valores de x e de y separadamente.

↓

Em geral, para começarmos a resolver o sistema, devemos analisar as equações para verificar se, ao somarmos as duas equações, uma das incógnitas não será anulada, desaparecendo e permitindo que se calcule o valor numérico da outra incógnita.
No exemplo dado, fica fácil perceber que se somarmos as duas equações a incógnita y não será cancelada. Devemos, então, utilizar um artifício matemático para forçar o cancelamento da incógnita y (ou x, tanto faz). Tal artifício constitui-se em multiplicar, separadamente, a(s) equação(ões) apresentada(as) inicialmente por um número tal que permita o cancelamento de uma das incógnitas (y, por exemplo).

↓

Analisando as equações apresentadas, pode-se perceber que se multiplicarmos a equação de cima por 5 (que é o coeficiente de y na equação de baixo) e a equação de baixo por 4 (que é o coeficiente de y na equação de cima), quando somarmos as duas equações a incógnita y será cancelada. Assim, temos:

$$\begin{cases} 7x - 4y = 10 \\ 3x + 5y = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 5. \\ 4 \end{matrix}\begin{cases} 7x - 4y = 10 \\ 3x + 5y = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 35x - \cancel{20}y = 50 \\ 12x + \cancel{20}y = 44 \end{cases}$$

35x +12x = 50 + 44 →Resolvendo→ 35x+12x=50+44

47.x = 94

$x = \frac{94}{47}$

Esse é o valor da incógnita x. ← $\boxed{x = 2}$

↓

Agora que já sabemos o valor numérico de **x**, podemos calcular facilmente o valor de **y**. Para calcular y, basta escolhermos qualquer uma das equações apresentadas no exemplo e substituir o valor de x por dois. Assim, temos:

Se escolhermos a equação de cima: 7x - 4y = 10 → $\boxed{x = 2}$

7.2 - 4y = 10

14 – 4y = 10

- 4y = 10 - 14

- 4y = - 4

$y = \frac{-4}{-4}$

Esse é o valor da incógnita y ← $\boxed{y = 1}$

Se escolhermos a equação de baixo: 3x + 5y = 11 → $\boxed{x = 2}$

3.2 + 5y = 11

6 + 5y = 11

5y = 11 – 6

5y = 5

$y = \frac{5}{5}$

Esse é o valor da incógnita y ← $\boxed{y = 1}$

<u>ATENÇÃO</u>: não existe a necessidade de calcular y utilizando as duas equações. Você pode utilizar a equação de cima ***<u>OU</u>*** a equação de baixo, pois as duas fornecem o ***<u>mesmo</u>*** resultado.

EXERCÍCIOS:

1) Resolva os Sistemas de Equações apresentados abaixo para encontrar os valores numéricos de **x** e de **y**:

a) $\begin{cases} x - 3y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

x = 3
y = 2

b) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$

$\boxed{\begin{matrix} x = 5 \\ y = 1 \end{matrix}}$

c) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases}$

$\boxed{\begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}}$

d) $\begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$

$\boxed{\begin{matrix} x = 2 \\ y = 3 \end{matrix}}$

e) $\begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

$\boxed{\begin{matrix} x = 1 \\ y = -1 \end{matrix}}$

f) $\begin{cases} 3m - 6p = 15 \\ 4m - p = 18 \end{cases}$

$\boxed{\begin{matrix} m = \frac{31}{7} \\ n = \frac{-2}{7} \end{matrix}}$

EQUAÇÕES DO 2º GRAU:

Como já vimos, uma Equação do 2º Grau é toda Equação cujo maior expoente da incógnita é dois (2). Assim, se a Equação for chamada de completa, ela deve apresentar termos de grau dois, de grau 1 e de grau zero, podendo ser escrita de maneira geral:

$\boxed{a.x^2 + b.x + c = 0}$, onde a, b e c são números quaisquer que representam os coeficientes de cada um dos graus da equação: **a** é o coeficiente do termo do segundo grau (x^2), **b** é o coeficiente do termo do primeiro grau (x) e **c** é o termo de grau zero (também chamado de termo independente de x).

Uma Equação do Segundo Grau será chamada de incompleta quando ela não possuir o termo do primeiro grau (assim, b = 0), o termo de grau zero (assim, c = 0) ou ambos.

Em se tratando de uma Equação do Segundo Grau, matematicamente devemos obter ***duas soluções que satisfazem a Equação***, ou seja, devemos descobrir dois valores para a incógnita da equação, a fim de resolvê-la.

Para resolver uma Equação do Segundo Grau, podemos utilizar a fórmula desenvolvida por um matemático, chamada de fórmula de Bháskara:

$\boxed{x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}}$, onde $\Delta = b^2 - 4.a.c$

Se substituirmos os valores para a, b e c que serão fornecidos pela equação na fórmula apresentada acima, vamos obter matematicamente dois valores numéricos de x que irão satisfazer a equação original. Por uma questão de organização, chamaremos a solução que utiliza o sinal positivo da fórmula de Bháskara de **x'** (xis linha) e a outra solução, que utiliza o sinal negativo da fórmula de Bháskara de **x"** (xis duas linhas).

Se a equação for chamada de incompleta, isto significa que: o coeficiente **b** é igual a zero, o coeficiente **c** é igual a zero ou ambos os coeficientes (**b** e **c**) são iguais a zero simultaneamente. Caso isso ocorra, pode utilizar normalmente a Fórmula de Bháskara, substituindo o(s) coeficiente(s) faltante(s) por zero.

Vamos aos exemplos:

EXEMPLOS:
EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU *COMPLETAS:*

1) Resolva as Equações apresentadas abaixo, encontrando o(s) valor(es) da(s) incógnita(s):

a) $2x^2 - 2x - 12 = 0 \rightarrow$

Primeiramente, vamos identificar qual é o Grau desta Equação. Para fazer isso, devemos verificar qual é o ***maior expoente*** das incógnitas apresentadas.
Olhando para a Equação, fica fácil visualizar que o maior ***expoente da incógnita x é dois***. Portanto, esta é uma Equação do Segundo Grau e para resolvê-la vamos utilizar a Fórmula de Bháskara.

↓

Como já sabemos que se trata de uma Equação do Segundo Grau, devemos agora identificar o valor dos coeficientes **a**, **b** e **c** que devem substituídos na Fórmula de Báskhara.
Para fazer isso, vamos comparar a Equação apresentada com a Equação na forma geral, apresentada na introdução, lembrando de escrever o x^2 em baixo de x^2, x embaixo de x e o termo independente embaixo de termo independente. Assim, temos:

$$2\,x^2 - 2\,x - 12 = 0$$
$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

Fazendo a comparação entre as Equações, ***tomando o devido cuidado com os sinais***, obtemos os seguintes valores:

$\boxed{a = 2}$; $\boxed{b = -2}$; $\boxed{c = -12}$ → esses são os valores que serão substituídos na Fórmula de Bháskara

↓

Vamos agora substituir os valores de a, b e c encontrados acima na Fórmula de Bháskara. Inicialmente, vamos calcular o valor de **Δ**, utilizando: **a = 2 ; b = - 2 ; c = - 12 .** Assim, temos:

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = (-2)^2 - 4.2.(-12)$ → Resolvendo:

$\Delta = 4 + 4.2.12$

$\Delta = 4 + 96$

$\boxed{\Delta = 100}$ → este valor será substituído na Fórmula de Bháskara

↓

Vamos agora substituir os valores de **a**, **b**, **c** e **Δ** na Fórmula de Bháskara. Assim, temos:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{100}}{2.2} \rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{100}}{2.2} \rightarrow x=\frac{2\pm10}{4}$$

$$x'=\frac{2+10}{4} \rightarrow x'=\frac{12}{4} \rightarrow \boxed{x'=3}$$

$$x''=\frac{2-10}{4} \rightarrow x''=\frac{-8}{4} \rightarrow \boxed{x''=-2}$$

ATENÇÃO: conforme já foi dito, como se trata de uma Equação do Segundo Grau, podemos obter duas soluções que satisfaçam a Equação original.
Satisfazer uma Equação significa que se substituirmos a(s) resposta(s) calculada(s) pela incógnita na Equação, a igualdade é verificada, como mostraremos abaixo:

$2x^2 - 2x - 12 = 0$ → para x = 3, temos: $2.3^2 - 2.3 - 12 = 0$ → $2.9 - 2.3 - 12 = 0$ → $18 - 6 - 12 = 0$ → $18 - 18 = 0$ → $\boxed{0 = 0}$

$2x^2 - 2x - 12 = 0$ → para x = -2, temos: $2.(-2)^2 - 2.(-2) - 12 = 0$ → $2.4 + 2.2 - 12 = 0$ → $8 + 4 - 12 = 0$ → $12 - 12 = 0$ → $\boxed{0 = 0}$

---

b) $3x^2 - 2x - 65 = 0$ →

Primeiramente, vamos identificar qual é o Grau desta Equação. Para fazer isso, devemos verificar qual é o ***maior expoente*** das incógnitas apresentadas.
Olhando para a Equação, fica fácil visualizar que o maior ***expoente da incógnita x é dois***. Portanto, esta é uma Equação do Segundo Grau e para resolvê-la vamos utilizar a Fórmula de Bháskara.

↓

Como já sabemos que se trata de uma Equação do Segundo Grau, devemos agora identificar o valor dos coeficientes **a**, **b** e **c** que devem substituídos na Fórmula de Báskhara.
Para fazer isso, vamos comparar a Equação apresentada com a Equação na forma geral, apresentada na introdução, lembrando de escrever o x^2 em baixo de x^2, x embaixo de x e o termo independente embaixo de termo independente. Assim, temos:

$$3x^2 - 2x - 65 = 0$$
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Fazendo a comparação entre as Equações, ***tomando o devido cuidado com os sinais***, obtemos os seguintes valores:

$\boxed{\mathbf{a = 3}}$; $\boxed{\mathbf{b = -2}}$; $\boxed{\mathbf{c = -65}}$ → esses são os valores que serão substituídos na Fórmula de Bháskara

↓

Vamos agora substituir os valores de a, b e c encontrados acima na Fórmula de Bháskara. Inicialmente, vamos calcular o valor de **Δ**, utilizando: **a = 3 ; b = - 2 ; c = - 65 .** Assim, temos:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4.3.(-65) \rightarrow \text{Resolvendo:}$$
$$\Delta = 4 + 4.3.65$$
$$\Delta = 4 + 780$$

$\boxed{\mathbf{\Delta = 784}}$ → este valor será substituído na Fórmula de Bháskara

↓

Vamos agora substituir os valores de **a**, **b**, **c** e **Δ** na Fórmula de Bháskara. Assim, temos:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{784}}{2.3} \rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{784}}{2.3} \rightarrow x=\frac{2\pm28}{6}$$

$$x'=\frac{2+28}{6} \rightarrow x'=\frac{30}{6} \rightarrow \boxed{x'=5}$$

$$x''=\frac{2-28}{6} \rightarrow x''=\frac{-26}{6} \rightarrow \boxed{x''=\frac{-13}{3}}$$

ATENÇÃO: conforme já foi dito, como se trata de uma Equação do Segundo Grau, podemos obter duas soluções que satisfaçam a Equação original.
Satisfazer uma Equação significa que se substituirmos a(s) resposta(s) calculada(s) pela incógnita na Equação, a igualdade é verificada, como mostraremos abaixo:

$3x^2 - 2x - 65 = 0$ → para x = 5, temos: $3.5^2 - 2.5 - 65 = 0$ → $3.25 - 2.5 - 65 = 0$ → $75 - 10 - 65 = 0$ → $75 - 75 = 0$ → $\boxed{0 = 0}$

$3x^2 - 2x - 65 = 0$ → para $x = \frac{-13}{3}$, temos: $3.\frac{(-13)^2}{(3)^2} - 2.\frac{(-13)}{3} - 65 = 0$ → $\frac{3.169}{9} + \frac{2.13}{3} - 65 = 0$ → $\frac{507}{9} + \frac{26}{3} - 65 = 0$ → $\boxed{0 = 0}$

c) $-2x^2 + 2x + 40 = 0$ →

Primeiramente, vamos identificar qual é o Grau desta Equação. Para fazer isso, devemos verificar qual é o ***maior expoente*** das incógnitas apresentadas.
Olhando para a Equação, fica fácil visualizar que o maior ***expoente da incógnita x é dois***. Portanto, esta é uma Equação do Segundo Grau e para resolvê-la vamos utilizar a Fórmula de Bháskara.

↓

Como já sabemos que se trata de uma Equação do Segundo Grau, devemos agora identificar o valor dos coeficientes **a**, **b** e **c** que devem substituídos na Fórmula de Báskhara.
Para fazer isso, vamos comparar a Equação apresentada com a Equação na forma geral, apresentada na introdução, lembrando de escrever o x^2 em baixo de x^2, x embaixo de x e o termo independente embaixo de termo independente. Assim, temos:

$$\boxed{-2}\,x^2 + \boxed{2}\,x + \boxed{40} = 0$$
$$\boxed{a}\,x^2 + \boxed{b}\,x + \boxed{c} = 0$$

Fazendo a comparação entre as Equações, ***tomando o devido cuidado com os sinais***, obtemos os seguintes valores:

$\boxed{\mathbf{a = -2}}$; $\boxed{\mathbf{b = 2}}$; $\boxed{\mathbf{c = 40}}$ → esses são os valores que serão substituídos na Fórmula de Bháskara

↓

Vamos agora substituir os valores de a, b e c encontrados acima na Fórmula de Bháskara. Inicialmente, vamos calcular o valor de **Δ**, utilizando: **a = - 2 ; b = 2 ; c = 40 .** Assim, temos:

$\Delta = \boxed{b}^2 - 4.\boxed{a}.\boxed{c}$

$\Delta = \boxed{2}^2 - 4.\boxed{(-2)}.\boxed{40}$ → Resolvendo:

$\Delta = 4 + 4.2.40$

$\Delta = 4 + 320$

$\boxed{\mathbf{\Delta = 324}}$ → este valor será substituído na Fórmula de Bháskara

↓

Vamos agora substituir os valores de **a**, **b**, **c** e **Δ** na Fórmula de Bháskara. Assim, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x = \frac{-\underset{b}{\boxed{2}} \pm \sqrt{\underset{\Delta}{\boxed{324}}}}{2.\underset{a}{\boxed{(-2)}}} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{324}}{-4} \rightarrow x = \frac{-2 \pm 18}{-4}$$

$$x' = \frac{-2+18}{-4} \rightarrow x' = \frac{16}{-4} \rightarrow \boxed{x' = -4}$$

$$x'' = \frac{-2-18}{-4} \rightarrow x'' = \frac{-20}{-4} \rightarrow \boxed{x'' = 5}$$

ATENÇÃO: conforme já foi dito, como se trata de uma Equação do Segundo Grau, podemos obter duas soluções que satisfaçam a Equação original.
Satisfazer uma Equação significa que se substituirmos a(s) resposta(s) calculada(s) pela incógnita na Equação, a igualdade é verificada, como mostraremos abaixo:

$-2x^2 + 2x + 40 = 0$ → para x =-4, temos: $-2.(-4)^2+2.(-4)+40 = 0 \rightarrow (-2).16 - 2.4+40 = 0 \rightarrow -32-8+40 = 0 \rightarrow -40 + 40 = 0 \rightarrow \boxed{\mathbf{0 = 0}}$

$-2x^2 + 2x + 40 = 0$ → para x = 5, temos: $(-2).5^2 + 2.5 + 40 = 0 \rightarrow (-2).25 + 2.5 + 40 = 0 \rightarrow -50 + 10 + 40 = 0 \rightarrow \boxed{\mathbf{0 = 0}}$

EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU ***INCOMPLETAS***:

2) Resolva as Equações apresentadas abaixo, encontrando o(s) valor(es) da(s) incógnita(s):

a) $5x^2 - 20 = 0$ →

Primeiramente, vamos identificar qual é o Grau desta Equação. Para fazer isso, devemos verificar qual é o ***maior expoente*** das incógnitas apresentadas.
Olhando para a Equação, fica fácil visualizar que o maior ***expoente da incógnita x é dois***. Portanto, esta é uma Equação do Segundo Grau.
Olhando com um pouco mais de atenção, podemos perceber também que se trata de uma equação incompleta, pois o termo de grau um (x) não está presente.
Neste caso, podemos resolver a equação apenas isolando **x** e encontrando o seu valor numérico, pois esta operação é mais rápida do que a aplicação da Fórmula de Báskara.

↓

Vamos, então, isolar **x** na Equação:

$$5x^2 - 20 = 0$$

$$5x^2 = 20$$

$$x^2 = \frac{20}{5} \rightarrow \mathbf{x^2 = 4}$$

→

Para isolar **x**, precisamos passar o expoente 2 (ao quadrado) para o outro lado do sinal de igual.
Para tanto, devemos passá-lo com a operação inversa, que neste caso é igual à ***Raiz Quadrada***. Além disso, devemos inserir o sinal ±, que indica que uma solução é positiva e a outra é negativa, ***pois a equação admite duas soluções.***

→

Assim, temos:

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm 2 \quad \boxed{\mathbf{x' = 2}} \quad \boxed{\mathbf{x'' = -2}}$$

Portanto, as soluções da equação são **2** e **-2**.

ATENÇÃO: a Equação acima também pode ser resolvida utilizando a fórmula de Bháskara. Porém, deve-se tomar o cuidado em considerar o termo do primeiro grau sendo igual a zero (**b = 0**), uma vez que ele não aparece na Equação original. Vamos apresentar aqui a resolução pela fórmula de Bháskara, apenas para efeito de ***constatação de que as respostas devem, obrigatoriamente, ser iguais***, seja qual for o método utilizado na resolução:

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$5x^2 + 0 - 20 = 0$$

→ **a = 5 ; b = 0 ; c = - 20** →

Calculando Δ:

$\Delta = b^2 - 4.a.c \rightarrow \Delta = 0^2 - 4.5.(-20) \rightarrow \Delta = 0 + 400 \rightarrow \boxed{\mathbf{\Delta = 400}}$

Aplicando o valores de a, b, c e Δ na fórmula de Bháskara, temos:

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{400}}{2.5} \rightarrow x = \frac{0 \pm 20}{10}$$

$$x' = \frac{0+20}{10} \rightarrow x' = \frac{20}{10} \rightarrow \boxed{x' = 2}$$

$$x'' = \frac{0-20}{10} \rightarrow x'' = \frac{-20}{10} \rightarrow \boxed{x'' = -2}$$

---

b) $4x^2 - 64 = 0$ →

Primeiramente, vamos identificar qual é o Grau desta Equação. Para fazer isso, devemos verificar qual é o ***maior expoente*** das incógnitas apresentadas.
Olhando para a Equação, fica fácil visualizar que o maior ***expoente da incógnita x é dois***. Portanto, esta é uma Equação do Segundo Grau.
Olhando com um pouco mais de atenção, podemos perceber também que se trata de uma equação incompleta, pois o termo de grau um não está presente.
Neste caso, podemos resolver a equação apenas isolando **x** e encontrando o seu valor numérico, pois esta operação é mais rápida do que a aplicação da Fórmula de Báskara.

↓

Vamos, então, isolar **x** na Equação:

$$4x^2 - 64 = 0$$

$$4x^2 = 64$$

$$x^2 = \frac{64}{4} \rightarrow \mathbf{x^2 = 16}$$

→

Para isolar **x**, precisamos passar o expoente 2 (ao quadrado) para o outro lado do sinal de igual.
Para tanto, devemos passá-lo com a operação inversa, que neste caso é igual à ***Raiz Quadrada***. Além disso, devemos inserir o sinal ±, que indica que uma solução é positiva e a outra é negativa, ***pois a equação admite duas soluções.***

→

Assim, temos:

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16}$$

$$x = \pm 4 \quad \boxed{\mathbf{x' = 4}} \quad \boxed{\mathbf{x'' = -4}}$$

Portanto, as soluções da equação são **4** e **-4**.

---

c) $4x^2 - 12x = 0$ →

Primeiramente, vamos identificar qual é o Grau desta Equação. Para fazer isso, devemos verificar qual é o ***maior expoente*** das incógnitas apresentadas.
Olhando para a Equação, fica fácil visualizar que o maior ***expoente da incógnita x é dois***. Portanto, esta é uma Equação do Segundo Grau.
Olhando com um pouco mais de atenção, podemos perceber também que se trata de uma equação incompleta, pois o termo de grau zero (ou termo independente) não está presente.
Neste caso, podemos resolver a equação apenas fatorando **x** e encontrando o seu valor numérico, pois esta operação é mais rápida do que a aplicação da Fórmula de Báskara.

↓

Vamos, então, fatorar **4x** na Equação:

$$4x^2 - 12x = 0$$

$$4x.(x - 3) = 0$$

→

Temos um produto que tem por resultado zero. Isso só é possível se uma das parcelas desse produto for igual a zero. Como temos duas parcelas, ou uma ou outra das parcelas devem ser iguais a zero. Assim, temos:

$4x = 0 \rightarrow x = \frac{0}{4} \rightarrow \boxed{x = 0}$

$x - 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = 3}$

→

Portanto, as soluções da equação são **0** e **3**.

ATENÇÃO: a Equação acima também pode ser resolvida utilizando a fórmula de Bháskara. Porém, deve-se tomar o cuidado em considerar o termo de grau zero (ou termo independente) sendo igual a zero (**c = 0**), uma vez que ele não aparece na Equação original. Vamos apresentar aqui a resolução pela fórmula de Bháskara, apenas para efeito de ***constatação de que as respostas devem, obrigatoriamente, ser iguais***, seja qual for o método utilizado na resolução:

$ax^2 + bx + c = 0$

$4x^2 - 12x + 0 = 0$

→ **a = 4 ; b = - 12 ; c = 0** →

Calculando Δ:

$\Delta = b^2 - 4.a.c \rightarrow \Delta = (-12)^2 - 4.4.0 \rightarrow \Delta = 144 + 0 \rightarrow \boxed{\Delta = 144}$

Aplicando o valores de a, b, c e Δ na fórmula de Bháskara, temos:

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{144}}{2.4} \rightarrow x = \frac{12 \pm 12}{8}$$

$$x' = \frac{12+12}{8} \rightarrow x' = \frac{24}{8} \rightarrow \boxed{x' = 3}$$

$$x'' = \frac{12-12}{8} \rightarrow x'' = \frac{0}{8} \rightarrow \boxed{x'' = 0}$$

d) $5x^2 - 15x = 0$ →

Primeiramente, vamos identificar qual é o Grau desta Equação. Para fazer isso, devemos verificar qual é o ***maior expoente*** das incógnitas apresentadas.
Olhando para a Equação, fica fácil visualizar que o maior ***expoente da incógnita x é dois***. Portanto, esta é uma Equação do Segundo Grau.
Olhando com um pouco mais de atenção, podemos perceber também que se trata de uma equação incompleta, pois o termo de grau zero (ou termo independente) não está presente.
Neste caso, podemos resolver a equação apenas fatorando **x** e encontrando o seu valor numérico, pois esta operação é mais rápida do que a aplicação da Fórmula de Báskara.

↓

Vamos, então, fatorar **5x** na Equação:

$5x^2 - 15x = 0$

$5x.(x - 3) = 0$

→

Temos um produto que tem por resultado zero. Isso só é possível se uma das parcelas desse produto for igual a zero. Como temos duas parcelas, ou uma ou outra das parcelas devem ser iguais a zero. Assim, temos:

$5x = 0 \rightarrow x = \frac{0}{5} \rightarrow \boxed{x = 0}$

$x - 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = 3}$

→

Portanto, as soluções da equação são **0** e **3**, ***sendo apenas coincidência as respostas serem iguais a da letra c).***

EXERCÍCIOS:

1) Resolva as Equações propostas abaixo:

a) $x^2 - x - 6 = 0$ → **ATENÇÃO: $x^2 = 1x^2$; $x = 1x$**

x' = 3
x'' = - 2

b) $x^2 - 7x + 10 = 0$

$$\boxed{\begin{array}{c} x' = 5 \\ x'' = 2 \end{array}}$$

c) $6x^2 + 5x + 1 = 0$

$$\boxed{x' = -\frac{1}{3} \;;\; x'' = -\frac{1}{2}}$$

d) $3x^2 - 48 = 0$

$$\boxed{\begin{array}{c} x' = 4 \\ x'' = -4 \end{array}}$$

e) $2x^2 - 128 = 0$

$$\boxed{\begin{array}{c} x' = 8 \\ x'' = -8 \end{array}}$$

f) $x^2 - 4x = 0$

x' = 0
x" = 4

g) $3x^2 - 81x = 0$

x' = 0
x" = 27

TEOREMA DE PITÁGORAS:

Definimos (de maneira simplificada) por Triângulo a toda figura geométrica fechada que possui três lados.

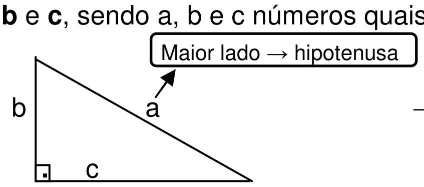
O Teorema de Pitágoras é válido para um ***Triângulo Retângulo***. Definimos por Triângulo Retângulo a todo Triângulo que possui um ângulo interno de 90º, também chamado de ***ângulo reto (90º)***. Este ângulo é representado pelo símbolo:

O Teorema de Pitágoras estabelece uma relação de cálculo entre os lados de um triângulo retângulo. ***Chamamos de hipotenusa sempre ao maior dos lados de um triângulo retângulo. Aos outros lados, chamamos de catetos.*** Portanto, todo triângulo retângulo terá uma hipotenusa apenas e dois catetos.

O Teorema de Pitágoras estabelece uma relação de cálculo entre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo. Tal Teorema tem grande aplicação prática em desenho, em construção civil, em serralherias, em marmorarias, etc. Podemos enunciar o Teorema de Pitágoras da seguinte maneira:

Para um Triângulo Retângulo, o quadrado do valor da sua hipotenusa será igual à soma dos quadrados dos seus catetos.

Para entendermos, considere o triângulo retângulo abaixo, onde chamamos a hipotenusa de **a** e os catetos de **b** e **c**, sendo a, b e c números quaisquer.



→

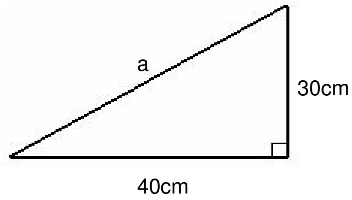
Aplicando o Teorema de Pitágoras nesse triângulo, teríamos:
- hipotenusa elevada ao quadrado: $\mathbf{a^2}$
- cateto b elevado ao quadrado: $\mathbf{b^2}$
- cateto c elevado ao quadrado: $\mathbf{c^2}$

Teorema de Pitágoras → $\boxed{\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}}$

EXEMPLOS:

1) Determine os lados desconhecidos nos triângulos retângulos apresentados abaixo:

a)



Neste caso, o lado desconhecido está representado pela letra **a**, que no exemplo é o maior dos lados (hipotenusa), conforme podemos identificar visualmente observando a figura.
Como a figura representa um triângulo retângulo onde precisamos calcular a sua hipotenusa, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras. Assim, temos:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

hipotenusa cateto cateto

$$a^2 = 40^2 + 30^2$$

$$a^2 = 1600 + 900$$

$$a^2 = 2500$$

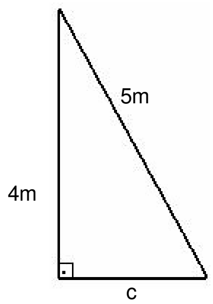
$$a = \sqrt{2500}$$

$\boxed{\mathbf{a = 50\ cm}}$ → valor da hipotenusa (a)

ATENÇÃO: com relação aos catetos, tanto faz se considerarmos b = 30 cm e c = 40cm ou c = 30 cm e b = 40 cm. Isso acontece, pois a operação a ser realizada é uma soma, e a ordem dos fatores a serem somados não altera o resultado final, mesmo que estes fatores estejam sendo elevados ao quadrado.

---

b)



Neste caso, o lado desconhecido está representado pela letra **c**, que no exemplo é um dos catetos. A hipotenusa vale 5m.
Como a figura representa um triângulo retângulo onde precisamos calcular um dos catetos e temos o outro cateto e a hipotenusa, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras. Assim, temos:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

hipotenusa cateto cateto

$$5^2 = 4^2 + c^2$$

$$25 = 16 + c^2$$

$$26 - 16 = c^2$$

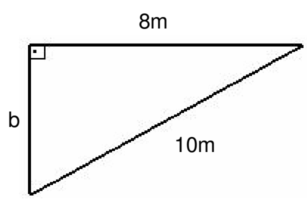
$$c^2 = 9$$

$$c = \sqrt{9}$$

$\boxed{\mathbf{c = 3\ m}}$ → valor do cateto (c)

---

c)



Neste caso, o lado desconhecido está representado pela letra **b**, que no exemplo é um dos catetos. A hipotenusa vale 10m.
Como a figura representa um triângulo retângulo onde precisamos calcular um dos catetos e temos o outro cateto e a hipotenusa, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras. Assim, temos:

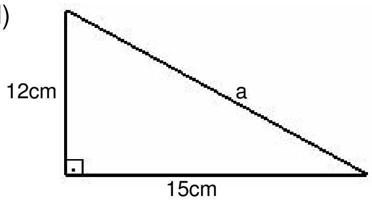
$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

hipotenusa cateto cateto

$$10^2 = b^2 + 8^2$$
$$100 = b^2 + 64$$
$$100 - 64 = b^2$$
$$b^2 = 36$$

$$b = \sqrt{36}$$

$\boxed{\mathbf{b = 6\ m}}$ → valor do cateto (b) d)



Neste caso, o lado desconhecido está representado pela letra **a**, que no exemplo é a hipotenusa. Um cateto vale 12cm e o outro vale 15cm.
Como a figura representa um triângulo retângulo onde precisamos calcular a hipotenusa e temos os dois catetos, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras. Assim, temos:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

hipotenusa cateto cateto

$a^2 = 12^2 + 15^2$

$a^2 = 144 + 225$

$a^2 = 369$

$a = \sqrt{369}$

$\boxed{\mathbf{a = 19{,}209\ cm}}$ → valor da hipotenusa (a)

<u>ATENÇÃO</u>: com relação aos catetos, tanto faz se considerarmos b = 12 cm e c = 15 cm ou c = 12 cm e b = 15 cm. Isso acontece, pois a operação a ser realizada é uma soma, e a ordem dos fatores a serem somados não altera o resultado final, mesmo que estes fatores estejam sendo elevados ao quadrado.
Apenas para ilustrar isso, temos:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

hipotenusa cateto cateto

$a^2 = 15^2 + 12^2$

$a^2 = 225 + 144$

$a^2 = 369$

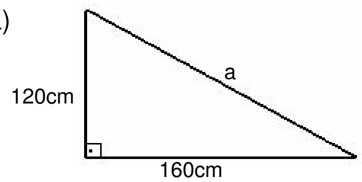
$a = \sqrt{369}$

$\boxed{\mathbf{a = 19{,}209\ cm}}$ → valor da hipotenusa (a)

<u>EXERCÍCIOS:</u>

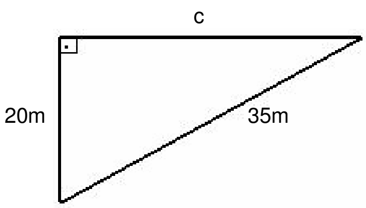
1) Determine os lados desconhecidos nos triângulos retângulos apresentados abaixo:

a)



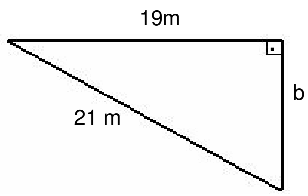
a = 200 cm

b)



c = 28,723 m

c)



b = 8,944 m

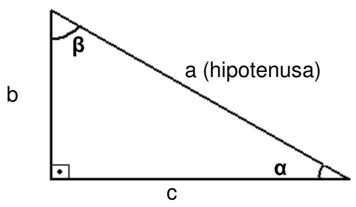
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: SENO, CO-SENO E TANGENTE

De maneira simplificada, são funções trigonométricas básicas, que podem ser aplicadas num triângulo retângulo. Relacionam os ângulos formados entre dois dos lados de um triângulo retângulo com um de seus ângulos internos.

Possuem grande aplicação na Matemática e nas ciências exatas, como a Física e a Química.

Essas funções trigonométricas são sempre aplicadas em relação a um dos ângulos internos de um triângulo retângulo. Assim, sabendo o valor de um dos ângulos internos do triângulo retângulo podemos calcular o valor de um dos catetos desse triângulo ou até mesmo o valor da sua hipotenusa.

Para entender as definições de seno, co-seno e tangente, se faz necessário conhecer uma nomenclatura bastante comum aos triângulos. Para tanto, considere o triângulo retângulo abaixo, onde b e c são os catetos:



Considerando o ângulo α:
- o cateto **b** encontra-se do outro lado do triângulo, ficando oposto ao ângulo α. Assim, o cateto **b** será chamado de ***cateto oposto*** ao ângulo α;
- o cateto **c** encontra-se encostado no ângulo α, ficando adjacente a ele. Assim, o cateto **c** será chamado de ***cateto adjacente*** ao ângulo α;

Considerando o ângulo β:
- o cateto **c** encontra-se do outro lado do triângulo, ficando oposto ao ângulo β. Assim, o cateto **c** será chamado de ***cateto oposto*** ao ângulo β;
- o cateto **b** encontra-se encostado no ângulo β, ficando adjacente a ele. Assim, o cateto **b** será chamado de ***cateto adjacente*** ao ângulo β;

ATENÇÃO: em ambos os casos, a hipotenusa é a mesma e está ali representada pela letra a.

FUNÇÃO SENO DE UM ÂNGULO α: sen α

Por definição, temos:

Para um Triângulo Retângulo, o seno de um ângulo interno α é igual à razão entre o valor do cateto oposto ao ângulo e o valor da hipotenusa desse triângulo.

Matematicamente, podemos escrever:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

FUNÇÃO CO-SENO DE UM ÂNGULO α: cos α

Por definição, temos:

Para um Triângulo Retângulo, o co-seno de um ângulo α é igual à razão entre o valor do cateto adjacente ao ângulo e o valor da hipotenusa desse triângulo.

Matematicamente, podemos escrever:

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

FUNÇÃO TANGENTE DE UM ÂNGULO α: tg α

Por definição, temos:

Para um Triângulo Retângulo, a tangente de um ângulo α é igual à razão entre o valor do cateto oposto ao ângulo e o valor do cateto adjacente desse triângulo.

Matematicamente, podemos escrever:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Para cada ângulo α do círculo trigonométrico existe um valor para sen α, cos α e tg α. Como não faz sentido decorarmos cada um desses valores, vamos apresentar duas tabelas com valores de seno, co-seno e tangente dos ângulos que são mais utilizados em problemas e exercícios. O conhecimento de uma dessas Tabelas pode tornar a resolução de um exercício mais rápida. Na Tabela 1, apresentaremos os valores em forma de fração ou raiz, sem fazer as contas. Na Tabela 2, apresentaremos o resultado das contas indicadas na Tabela 1, lembrando que as duas Tabelas apresentam valores absolutamente iguais, porém escritos de maneira diferente.

Ângulo (α)	sen α	cos α	tg α
0º	0	1	0
30º	1/2	√3/2	√3/3
45º	√2/2	√2/2	1
60º	√3/2	1/2	√3
90º	1	0	$\nexists$

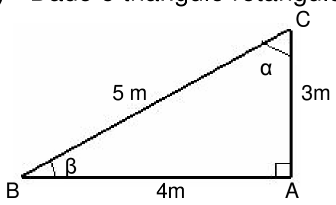
Tabela 1

Ângulo (α)	sen α	cos α	tg α
0º	0	1	0
30º	0,5	0,866	0,577
45º	0,707	0,707	1
60º	0,866	0,5	1,732
90º	1	0	$\nexists$

Tabela 2

EXEMPLOS:

1) Dado o triângulo retângulo ABC abaixo, calcule:



Antes de resolver o exercício, vamos identificar quem é a hipotenusa e quem são os catetos, em relação a cada um dos ângulos:

Hipotenusa: **5m**

Em relação ao ângulo α, temos:

- cateto oposto ao ângulo α: **4m**
- cateto adjacente ao ângulo α: **3m**

Em relação ao ângulo β, temos:

- cateto oposto ao ângulo β: **3m**
- cateto adjacente ao ângulo β: **4m**

a) sen α =

Por definição, temos que:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

Em relação ao ângulo α, temos que:

cateto oposto → 4
hipotenusa → 5

→

Substituindo os valores na fórmula, temos:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \boxed{\text{sen}\,\alpha = 0{,}8}$$

ATENÇÃO: se quisermos saber qual é o valor do ângulo α, basta consultar numa tabela de valores de senos e co-senos qual é o ângulo que possui 0,8 como valor de seno.

---

b) cos α =

Por definição, temos que:

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Em relação ao ângulo α, temos que:

cateto adjacente → 3
hipotenusa → 5

→

Substituindo os valores na fórmula, temos:

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \boxed{\cos\alpha = 0{,}6}$$

ATENÇÃO: se quisermos saber qual é o valor do ângulo α, basta consultar numa tabela de valores de senos e co-senos qual é o ângulo que possui 0,6 como valor de co-seno.

c) sen β =

Por definição, temos que:

sen β = $\dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$

Em relação ao ângulo β, temos que:

cateto oposto → 3
hipotenusa → 5

→

Substituindo os valores na fórmula, temos:

sen β = $\dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$

sen β = $\dfrac{3}{5}$ → $\boxed{\textbf{sen } \beta = 0,6}$

ATENÇÃO: se quisermos saber qual é o valor do ângulo β, basta consultar numa tabela de valores de senos e co-senos qual é o ângulo que possui 0,6 como valor de seno.

d) cos β =

Por definição, temos que:

cos β = $\dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$

Em relação ao ângulo β, temos que:

cateto adjacente → 4
hipotenusa → 5

→

Substituindo os valores na fórmula, temos:

cos β = $\dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$

cos β = $\dfrac{4}{5}$ → $\boxed{\textbf{cos } \beta = 0,8}$

ATENÇÃO: se quisermos saber qual é o valor do ângulo β, basta consultar numa tabela de valores de senos e co-senos qual é o ângulo que possui 0,8 como valor de co-seno.

e) tg β =

Por definição, temos que:

tg β = $\dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$

Em relação ao ângulo β, temos que:

cateto oposto → 3
cateto adjacente → 4

→

Substituindo os valores na fórmula, temos:

tg β = $\dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$

tg β = $\dfrac{3}{4}$ → $\boxed{\textbf{tg } \beta = 0,75}$

ATENÇÃO: se quisermos saber qual é o valor do ângulo β, basta consultar numa tabela de valores de senos, co-senos e tangentes qual é o ângulo que possui 0,75 como valor de tangente.

f) tg α =

Por definição, temos que:

tg α = $\dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$

Em relação ao ângulo α, temos que:

cateto oposto → 4
cateto adjacente → 3

→

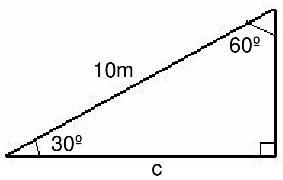
Substituindo os valores na fórmula, temos:

tg α = $\dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$

tg α = $\dfrac{4}{3}$ → $\boxed{\textbf{tg } \alpha = 1,333}$

ATENÇÃO: se quisermos saber qual é o valor do ângulo β, basta consultar numa tabela de valores de senos, co-senos e tangentes qual é o ângulo que possui 0,75 como valor de tangente.

2) Considerando o triângulo retângulo abaixo, calcule os lados desconhecidos **b** e **c**.



Antes de resolver o exercício, vamos identificar quem é a hipotenusa e quem são os catetos, em relação a cada um dos ângulos:
Hipotenusa: **10m**

Em relação ao ângulo de 60º, temos:

- cateto oposto ao ângulo 60º: **c**
- cateto adjacente ao ângulo 60º: **b**

Em relação ao ângulo 30º, temos:

- cateto oposto ao ângulo 30º: **b**
- cateto adjacente ao ângulo 30º: **c**

Vamos calcular primeiro o valor de b. Como b é cateto oposto ao ângulo de 30º, podemos aplicar a definição de seno. Assim, temos:

sen α = $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$

sen 30º = $\frac{b}{10}$

sen 30º. 10 = b

0,5 . 10 = b

Da Tabela de senos e co-senos

$\boxed{b = 5\ m}$

Outra maneira de se calcular b seria perceber que b é cateto adjacente do ângulo de 60º. Assim, podemos aplicar a definição de co-seno:

cos α = $\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$

cos 60º = $\frac{b}{10}$

cos 60º. 10 = b

0,5 . 10 = b

$\boxed{b = 5\ m}$

→

Agora vamos calcular o valor de c. Como c é cateto oposto ao ângulo de 60º, podemos aplicar a definição de seno. Assim, temos:

sen α = $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$

sen 60º = $\frac{c}{10}$

sen 60º. 10 = c

0,866 . 10 = c

Da Tabela de senos e co-senos

$\boxed{c = 8{,}66\ m}$

Outra maneira de se calcular c seria perceber que c é cateto adjacente do ângulo de 30º. Assim, podemos aplicar a definição de co-seno:

cos α = $\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$

cos 30º = $\frac{c}{10}$

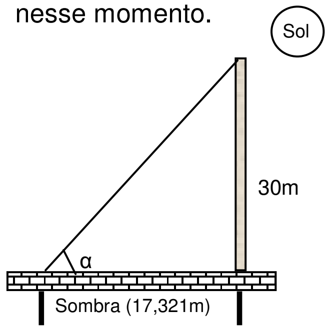
cos 30º.10 = c

0,866 . 10 = c

$\boxed{c = 8{,}66\ m}$

---

3) Um mastro horizontal possui uma altura de 30m e, em determinado momento do dia, ele projeta uma sombra que possui comprimento de 17,321m. Calcule o ângulo de elevação do Sol em relação ao mastro, nesse momento.



Precisamos saber qual é o ângulo com que a projeção dos raios luminosos do Sol fazem em relação à vertical, portanto queremos saber o ângulo que foi chamado aqui de α.

Sabemos o valor da altura do mastro (30m), que no triângulo apresentado é o ***cateto oposto*** ao ângulo α.

Sabemos também o comprimento da sombra (17,321m), que nesse caso é o ***cateto adjacente*** ao ângulo α.

Precisamos, portanto, utilizar uma relação existente entre o cateto oposto e o cateto adjacente. Analisando as definições apresentadas, devemos utilizar a definição de tangente:

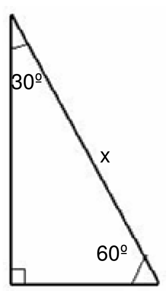
tg α = $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$ → tg α = $\frac{30}{17{,}321}$ → $\boxed{\textbf{tg α = 1,732}}$

Como o nosso objetivo é descobrir o ângulo α (e não a sua tangente), precisamos consultar a Tabela de valores de seno, co-seno e tangente para descobrir qual é o ângulo que tem por tangente o valor 1,732. Analisando a Tabela 2 apresentada, podemos perceber que o ângulo procurado é de 60º. Assim:

$\boxed{\alpha = 60º}$ → Resposta

---

4) Para o triângulo abaixo, determine o valor de x.



Precisamos saber qual é o valor de x, que é a hipotenusa do triângulo dado.

Considerando o ângulo de 30º, o seu ***cateto oposto*** vale 60 cm. Como temos cateto oposto e a hipotenusa, podemos aplicar a definição de seno:

sen α = $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$ → sen 30º = $\frac{60}{x}$ → 0,5 = $\frac{60}{x}$ → (0,5).x = 60 → x = $\frac{60}{0{,}5}$ → $\boxed{\textbf{x =120cm}}$

OU

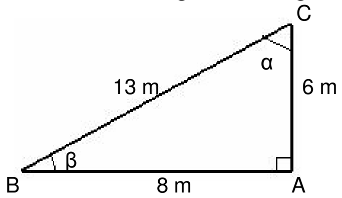
Precisamos saber qual é o valor de x, que é a hipotenusa do triângulo dado.

Considerando o ângulo de 60º, o seu ***cateto adjacente*** vale 60 cm. Como temos cateto oposto e a hipotenusa, podemos aplicar a definição de co-seno:

cos α = $\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$ → cos 60º = $\frac{60}{x}$ → 0,5 = $\frac{60}{x}$ → (0,5).x = 60 → x = $\frac{60}{0{,}5}$ → $\boxed{\textbf{x =120cm}}$

<u>EXERCÍCIOS:</u>

1) Dado o triângulo retângulo ABC abaixo, calcule:



a) sen α

sen α = 0,6154

b) cos α =

cos α = 0,4615

c) sen β =

sen β = 0,4615

d) cos β =

cos β = 0,6154

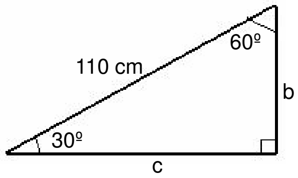
f) tg β =

tg β = 0,75

g) tg α =

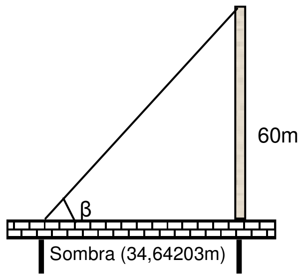
tg α = 1,3333

2) Considerando o triângulo retângulo abaixo, calcule os lados desconhecidos **b** e **c**.



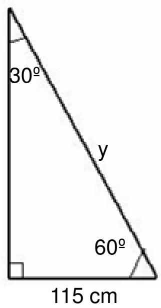
b = 55 cm
c = 95,263 cm

3) Um mastro horizontal possui uma altura de 60 m e, em determinado momento do dia, ele projeta uma sombra que possui comprimento de 34,64203 m. Calcule o ângulo de elevação do Sol em relação ao mastro, nesse momento. Sol



β = 60º

4) Para o triângulo abaixo, determine o valor de y.



y = 230 cm

REFERÊNCIAS:

1. **BRANDÃO, MARCIUS** – Matemática, Conceituação Moderna - 5ª, 6ª, 7ª, 8ª séries – Editora do Brasil S/A – São Paulo.
2. **CASTRUCCI, B. E OUTROS** – Matemática - 5ª, 6ª, 7ª, 8ª séries – Editora FTD. S/A – São Paulo.
3. **VAZ, GRACIETE S**. – Matemática – Curso Pró-Técnico – Ministério da Educação e Cultura – Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná – Paraná.
4. **NETO, SCIPIONE DE PIERO** – Matemática na Escola Renovada - 1ª, 2ª, 3ª, 4ª séries do curso ginasial – Editora Saraiva – São Paulo.
5. **QUINTELA, ARI** – Matemática para o curso ginasial.