Certo país adquiriu 5.000.000 de doses das vacinas Alfa, Beta e Gama, pagando um preço de $40.000.000,00 pelo total. Cada dose das vacinas Alfa, Beta e Gama custou $5,00, $10,00 e $20,00, respectivamente. Sabendo que o número de doses adquiridas da vacina Beta é o triplo do número de doses adquiridas da vacina Gama, o número de doses adquiridas da vacina Alfa foi de:

a) 1.500.000.

b) 2.000.000.

c) 2.500.000.

d) 3.000.000.

Resolução

De acordo com o enunciado temos o sistema a seguir:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 5\,000\,000 \\ 5\alpha + 10\beta + 20\gamma = 40\,000\,000 \quad (\div 5) \\ \beta = 3\gamma \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 5\,000\,000 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma = 8\,000\,000 \\ \beta = 3\gamma \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 4\gamma = 5\,000\,000 \quad (\text{x } 5) \\ \alpha + 10\gamma = 8\,000\,000 \quad (\text{x } 2) \\ \beta = 3\gamma \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\alpha + 20\gamma = 25\,000\,000 \quad (1) \\ 2\alpha + 20\gamma = 16\,000\,000 \quad (2) \\ \beta = 3\gamma \quad (3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

Fazendo a equação (1) menos a equação (2), temos $3\alpha = 9\,000\,000$ e $\alpha = 3\,000\,000$.
A quantidade de doses da vacina α que foram compradas é 3 000 000.

Resposta: D

Certo modelo de carro é vendido em duas versões: uma a gasolina e outra híbrida. Essa última versão conta com um motor elétrico para funcionar em baixas velocidades, reduzindo, assim, o consumo de combustível e também os índices de poluição.

A versão a gasolina custa R$ 150.000,00 e a versão híbrida custa R$ 180.000,00. A tabela a seguir indica o consumo de combustível de cada uma das versões:

	Uso na cidade	Uso na estrada
Versão a gasolina	12 km/ℓ	14 km/ℓ
Versão híbrida	18 km/ℓ	16 km/ℓ

Note que a versão híbrida é mais econômica, porém custa mais caro.

Um motorista faz diariamente um percurso de 36 km na cidade e de 56 km na estrada. Considerando que cada litro de gasolina custa R$ 5,00 e que, ao longo do tempo, esse preço será constante e o percurso não se alterará, quantos anos de uso serão necessários para que a economia no abastecimento compense o preço mais alto pago inicialmente pelo carro híbrido?

a) Mais que 8 e menos que 10 anos.

b) Mais que 10 e menos que 12 anos.

c) Mais que 12 e menos que 14 anos.

d) Mais que 14 e menos que 16 anos.

Resolução

I) A partir do consumo tem-se que o carro à gasolina o gasto diário de combustível seria de $\dfrac{36\text{ km}}{12\text{ km}/\ell}$ = 3 litros, mais $\dfrac{56\text{ km}}{14\text{ km}/\ell}$ = 4 litros, ou seja, 7 litros.

Já com o carro híbrido o gasto diário seria de $\dfrac{36\text{ km}}{18\text{ km}/\ell}$ = 2 litros, mais $\dfrac{56\text{ km}}{16\text{ km}/\ell}$ = 3,5 litros, ou seja, 5,5 litros.

II) A economia do carro híbrido é de 1,5 litros de gasolina por dia.

III) Como o valor do litro da gasolina é R$ 5,00 tem-se que em x dias:

$1{,}5 \,.\, 5 \,.\, x = 30\,000 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\cancel{30\,000}}{1{,}5 \,.\, \cancel{5}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6\,000}{1{,}5} \Leftrightarrow$$

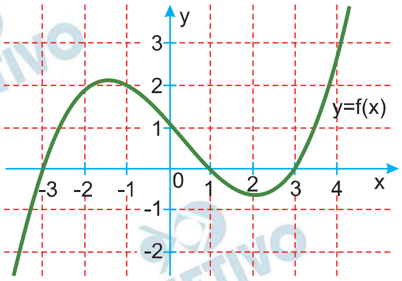
$\Leftrightarrow x = 4\,000$ **dias**

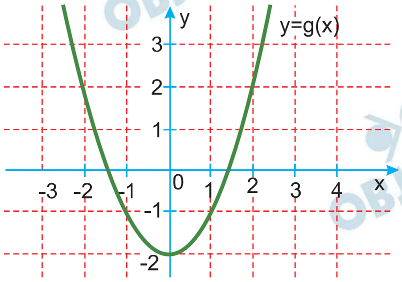
Fazendo $\left(\dfrac{4000}{365}\right)$ **anos** $\cong$ **10,9 anos**

Logo, o tempo será maior que 10 anos e menor que 12 anos.

Resposta: B

As figuras abaixo ilustram, respectivamente, os gráficos das funções y = f(x) e y = g(x).





Então f(g(–1)) – g(f(1)) vale:

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

Resolução

1) A partir dos gráficos, temos:
g(–1) = –1 e f(1) = 0

2) A partir dos gráficos, temos:
f(–1) = 2 e g(0) = –2

3) f(g(–1)) – g(f(1)) = f(–1) – g(0) = 2 – (–2) = 4

Resposta: D

Dados os números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a média geométrica M destes termos é calculada por:

$$M = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}.$$

A média geométrica de $1, 10, 100, \ldots, 10^{22}$ é:

a) 10^{11}.

b) 10^{12}.

c) 10^{13}.

d) 10^{14}.

Resolução

A média geométrica entre 1, 10, 100, … 10^{22} é

$$M = \sqrt[23]{10^0 \cdot 10^1 \cdot 10^2 \ldots 10^{22}} = \sqrt[23]{10^{0+1+2+\ldots+22}} =$$

$$= \sqrt{10^{\left[\frac{(0+22) \cdot 23}{2}\right]}} = \sqrt[23]{10^{11 \cdot 23}} = 10^{11}$$

Resposta: A

USE O TEXTO A SEGUIR PARA RESPONDER ÀS QUESTÕES 17 E 18.

Para conter uma certa epidemia viral, uma vacina será aplicada a uma população. Sabe-se que:

- a efetividade de uma vacina pode ser entendida como sendo a porcentagem dos indivíduos vacinados que estarão imunes à doença; e
- para controlar a epidemia, a porcentagem mínima de uma dada população a ser imunizada é dada pela fórmula $I(R_0) = 100(R_0 - 1)/R_0$, em que $R_0 > 1$ é um valor associado às características da epidemia.

Assume-se, ainda, que uma eventual imunização somente é adquirida por meio da vacina.

17

Em relação à epidemia e à vacinação, é correto afirmar que

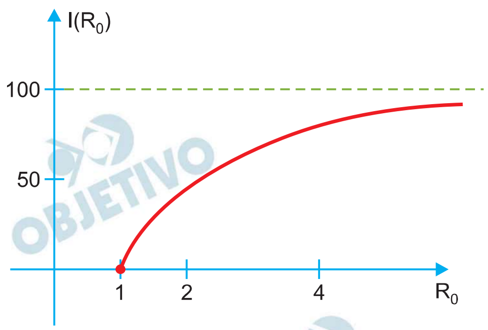
a) a porcentagem mínima da população que deve ser vacinada para controlar a epidemia é sempre maior que 50%.

b) para uma vacina, quanto maior R_0, menor a porcentagem mínima da população que deve ser vacinada para controlar a epidemia.

c) para uma vacina, quanto maior R_0, maior a porcentagem mínima da população que deve ser vacinada para controlar a epidemia.

d) para um dado R_0, quanto maior a efetividade da vacina, maior a porcentagem mínima da população que deve ser vacinada para controlar a epidemia.

Resolução



$$I(R_0) = \frac{100\,(R_0 - 1)}{R_0}$$

$$I(R_0) = \frac{100\,R_0}{R_0} - \frac{100}{R_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I(R_0) = 100 - \frac{100}{R_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I(R_0) = 100\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)$$

Como essa função é crescente para $R_0 > 1$, a resposta correta é a C.

Resposta: Ⓒ

Assuma que $R_0 = 2$. Sabendo que uma dada vacina tem 80% de efetividade, em qual dos intervalos se encontra a porcentagem mínima da população que deve ser vacinada para controlar a epidemia?

a) Entre 46% e 55%.

b) Entre 56% e 65%.

c) Entre 66% e 75%.

d) Entre 76% e 85%.

Resolução

Para Ro = 2, temos:

$$\mathbf{I(2) = \frac{100\,(2-1)}{2} = 50\%}$$

Como a efetividade da vacina é 80%, a porcentagem da população (P) que deve ser vacinada será dada por:

$$\mathbf{P \,.\, 80\% = 50\%}$$

$$\mathbf{P = \frac{50\%}{0{,}8} = 62{,}5\%}$$

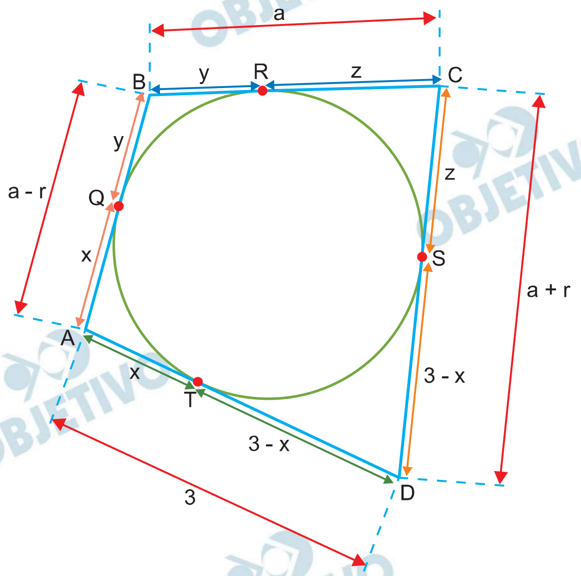
Resposta: B

Um círculo está inscrito em um quadrilátero ABCD. Seja T o ponto de tangência do lado DA com o círculo. Sabe-se que as medidas dos lados AB, BC e CD formam, nesta ordem, uma progressão aritmética crescente de números inteiros e que a medida do lado DA é 3. Considerando que a medida do segmento TA é um número inteiro, as medidas dos lados AB, BC e CD são, respectivamente:

a) 1, 3, 5. b) 2, 3, 4.

c) 2, 4, 6. d) 3, 4, 5.

Resolução



I) Como AB; BC e CD formam nessa ordem uma progressão aritmética crescente de números inteiros, temos:
AB = a – r; AC = a e CD = a + r com r > 0.

II) Assim, de acordo com a figura, temos:

$$\begin{cases} x + y = a - r \\ y + z = a \\ z + 3 - x = a + r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = a - r \\ -y - z = -a \\ z - x = a + r - 3 \end{cases} +$$

$$0 = a - 3 \Rightarrow a = 3$$

III) Como a = 3, AB = a – r e AB = x + y, temos:
x + y = 3 – r, com r > 0.
Assim, como x é inteiro, podemos concluir que r = 1 e AB = 3 – 1 = 2.
Observe que para r = 2, temos: AB = 3 – 2 = 1 e x não será inteiro.
Logo, para a = 3 e r = 1, temos:
AB = a – r = 3 – 1 = 2, BC = a = 3 e
CD = a + r = 3 + 1 = 4

Resposta: B

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 3 & k^2 \end{pmatrix}$$

e seja $B = A + A^T$, onde A^T é a transposta da matriz A. Sobre o sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2021 \\ 2022 \end{pmatrix}$$

é correto afirmar que:

a) se $k = 0$, o sistema não tem solução.

b) se $k = -1$, o sistema tem infinitas soluções.

c) se $k = -1$, o sistema não tem solução.

d) se $k = 3$, o sistema tem infinitas soluções.

Resolução

1) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 3 & k^2 \end{pmatrix}$, então $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ k & k^2 \end{pmatrix}$

2) $B = A + A^T = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 3 & k^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ k & k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & k+3 \\ k+3 & 2k^2 \end{pmatrix}$

3) $$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2021 \\ 2022 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & k+3 \\ k+3 & 2k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2021 \\ 2022 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + (k+3)\,y = 2021 \\ (k+3)\,x + 2k^2 y = 2022 \end{cases}$$

4) O determinante do sistema é

$$D = \begin{vmatrix} 2 & k+3 \\ k+3 & 2k^2 \end{vmatrix} = k^2 - 2k - 3$$

5) Se $k^2 - 2k - 3 \neq 0$, o sistema é possível e determinado, ou seja, para $k \neq -1$ ou $k \neq 3$.

6) Se $k = -1 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 2021 \\ 2x + 2y = 2022 \end{cases}$ o sistema será impossível.

7) Se $k = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 6y = 2021 \\ 6x + 18y = 2022 \end{cases}$ o sistema será impossível.

Assim, podemos afirmar se $k = -1$, o sistema não tem solução.

Resposta: C

21

Pedra-papel-tesoura, também chamado jankenpon ou *jokempô*, é um jogo recreativo para duas pessoas. Nesse jogo, os participantes usam as mãos para representar os símbolos de pedra, papel e tesoura, conforme mostrado nos emojis a seguir:

Pedra: Papel: Tesoura:

Pelas regras do jogo, o participante que escolher "pedra" ganha do que escolher tesoura; o participante que escolher tesoura ganha do que escolher papel; por fim, o que escolher papel ganha do que escolher pedra. Se ambos escolherem os mesmos símbolos, eles empatam.

Admitindo que os participantes escolhem os símbolos com igual probabilidade, qual a chance de acontecer pelo menos um empate em três partidas?

a) 16/27.

b) 17/27.

c) 18/27.

d) 19/27.

Resolução

Sendo a probabilidade de um jogador em um partida escolher um dos símbolos $\frac{1}{3}$, a probabilidade de em uma partida não sair empate é $\frac{2}{3}$.

Dessa forma, a probabilidade de <u>não sair</u> empate em nenhuma das três partidas é $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$.

Logo, a probabilidade de <u>sair</u> empate em pelo menos uma das três partidas é $1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$.

Resposta: D

A parábola $y = -x^2 + bx + c$ intercepta o eixo x nos pontos (p, 0) e (q, 0). Sabe-se que ela intercepta uma única vez cada uma das retas dadas pelas equações $y = 2x + 1$ e $y = 1 - \frac{x}{2}$. O valor de p + q é:

a) 2/3.
b) 3/4.
c) 4/3.
d) 3/2.

Resolução

1) **Como $y = -x^2 + bx + c$ intercepta o eixo x nos pontos (p, 0) e (q; 0), suas raízes são p e q, sendo que:**

$$p + q = -\frac{b}{-1} \Rightarrow \boxed{p + q = b}$$

2) **Como $y = -x^2 + bx + c$ intercepta a reta $y = 2x + 1$, temos:**
$-x^2 + bx + c = 2x + 1 \Rightarrow -x^2 + (b - 2)\,x + c - 1 = 0$, **com $\Delta = 0$, pois intercepta uma única vez. Assim,**
$(b - 2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (c - 1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{(b - 2)^2 = -4 \cdot (c - 1)}$

3) **Como $y = -x^2 + bx + c$ intercepta a reta $y = 1 - \frac{x}{2}$, temos:**

$$-x^2 + bx + c = 1 - \frac{x}{2} \Rightarrow -x^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right) x + c - 1 = 0,$$

com $\Delta = 0$, pois intercepta uma única vez. Assim

$$\left(b + \frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (c - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(b + \frac{1}{2}\right)^2 = -4 \cdot (c - 1)}$$

4) **De (2) e (3) podemos afirmar que:**

$$(b - 2)^2 = \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow b^2 - 4b + 4 = b^2 + b + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 5b = 4 - \frac{1}{4} \Rightarrow 5b = \frac{15}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{4}$$

e $p + q = \frac{3}{4}$

Resposta: B

23

O polinômio $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ é divisível por $2x^2 - x + 4$. O valor de $c + 2b - a$ é:

a) 9.

b) 15.

c) 21.

d) 25.

Resolução

Efetuando a divisão temos:

$$\begin{array}{rl|l}
 & 2x^3 \quad + \quad ax^2 \quad + \quad bx \quad + \quad c & 2x^2 - x + 4 \\ \cline{3-3}
+ & \underline{-\,2x^3 \quad + \quad x^2 \quad - \quad 4x \qquad\qquad} & x + \dfrac{a+1}{2} \\
 & (a+1)\,.\,x^2 + (b-4)\,.\,x \quad + \quad c & \\
+ & \underline{-\,(a+1)\,.\,x^2 + \dfrac{a+1}{2}\,.\,x \;\; - 2\,.\,(a+1)} & \\
 & \left(b - 4 + \dfrac{a+1}{2}\right) x + c - 2a - 2 \equiv 0, \forall\, x \in \mathbb{R} &
\end{array}$$

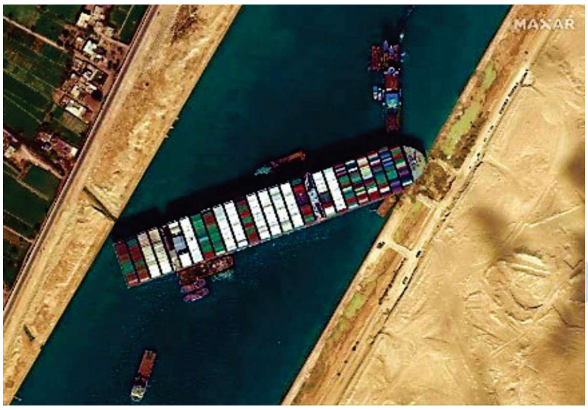
Como $p(x)$ é divisível por $2x^2 - x + 4$

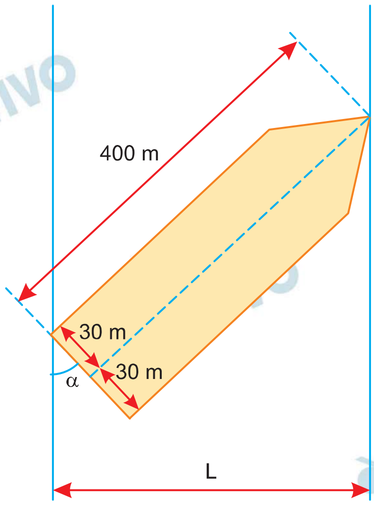
$$\begin{cases} b - 4 + \dfrac{a+1}{2} = 0 \\ c - 2a - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b + a = 7 \\ c - 2a = 2 \end{cases} +$$

$$c + 2b - a = 9$$

Resposta: A

No dia 23 de março de 2021, um navio encalhou no canal de Suez, no Egito. A embarcação tinha 400 metros de comprimento e 60 metros de largura. No ponto onde aconteceu o acidente, o canal de Suez não tem mais do que 200 metros de largura. Abaixo apresentamos uma foto de satélite e uma figura representando a situação. O ângulo α indicado na figura abaixo mede 67,5°.





A largura do canal, medida em metros e indicada por L na figura anterior, é:

Dados:

- $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$
- $\text{sen}(2\theta) = 2\text{sen}(\theta)\cos(\theta)$.

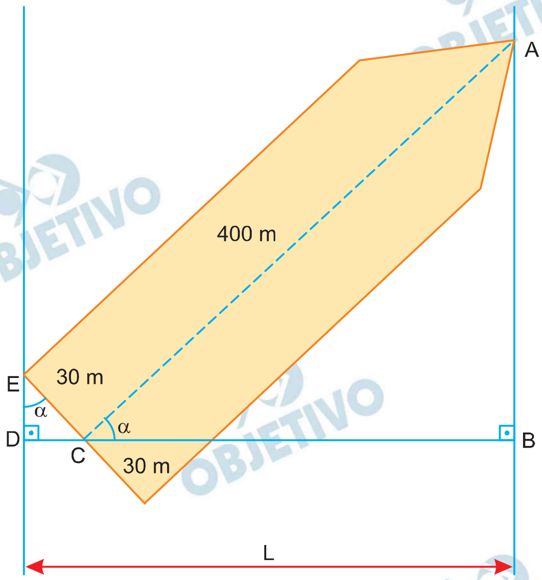
a) $400\sqrt{2 - \sqrt{2}} - 60\sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx 195{,}3$

b) $200\sqrt{2 - \sqrt{2}} - 15\sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx 125{,}4$

c) $200\sqrt{2 - \sqrt{2}} + 15\sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx 180{,}8$

d) $200\sqrt{3 - \sqrt{3}} - 15\sqrt{3 + \sqrt{3}} \approx 192{,}6$

Resolução



I) $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha$

Logo,

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{\cos(2\alpha)+1}{2}} \text{ e } \text{sen}\,\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}}$$

pois α é agudo.

Fazendo α = 67,5°, temos:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{\cos 135° + 1}{2}} = \sqrt{\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 135°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

II) Nos triângulos retângulos ABC e CDE,

$$\cos\alpha = \frac{BC}{400} \Leftrightarrow BC = 400 \,.\, \cos\alpha \quad \text{e}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{CD}{30} \Leftrightarrow CD = 30\,.\,\text{sen}\,\alpha\text{, respectivamente.}$$

Logo, a largura do canal será

$$L = BC + CD$$

$$L = 400\,.\,\cos\alpha + 30\,.\,\text{sen}\,\alpha$$

$$L = 400\,.\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + 30\,.\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$L = 200\sqrt{2-\sqrt{2}} + 15\sqrt{2+\sqrt{2}} \approx 180{,}8$$

Resposta: C