M.01

Uma sequência de números naturais é construída da seguinte forma: seu primeiro termo t_1 é escolhido como sendo um número natural qualquer. Se t_1 for par, então $t_2 = \dfrac{t_1}{2}$ e, se t_1 for ímpar, então $t_2 = 3t_1 + 1$. Os termos seguintes t_n são obtidos de acordo com essa mesma regra. Por exemplo, se $t_1 = 3$, então $t_2 = 10$, $t_3 = 5$, $t_4 = 16$ e assim por diante.

Dessa forma, a partir de $t_1 \in \mathbb{N}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a sequência t_n é definida como

$$t_n = \begin{cases} \dfrac{t_{n-1}}{2}, \text{ se } t_{n-1} \text{ for par} \\ 3 \cdot t_{n-1} + 1, \text{ se } t_{n-1} \text{ for ímpar} \end{cases}$$

a) Para $t_1 = 22$, determine t_4.

b) Determine todos os possíveis t_1 para os quais $t_4 = 10$.

c) Para $t_1 = 26$, determine t_{2022}.

Resolução

$t_1 \in \mathbb{N}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ temos:

$$t_n = \begin{cases} \dfrac{t_{n-1}}{2}, \text{ se } t_{n-1} \text{ for par} \\ 3 \cdot t_{n-1} + 1, \text{ se } t_{n-1} \text{ for ímpar} \end{cases}$$

a) Se $t_1 = 22$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{22}{2} = 11$$

$$\Rightarrow t_3 = 3 \cdot 11 + 1 = 34$$

$$\Rightarrow t_4 = \frac{34}{2} = 17$$

b) Como $t_n = \begin{cases} \dfrac{t_{n-1}}{2}, \text{ se } t_{n-1} \text{ for par} \\ 3 \cdot t_{n-1} + 1, \text{ se } t_{n-1} \text{ for ímpar} \end{cases}$

então $\begin{cases} t_{n-1} = 2 \cdot t_n, \text{ se } t_{n-1}, \text{ for par} \\ t_{n-1} = \dfrac{t_n - 1}{3}, \text{ se } t_{n-1} \text{ for ímpar} \end{cases}$

Nestas condições, para $t_4 = 10$, podemos construir o diagrama:

- $t_4 = 10$
  - $t_3 = 2 \,.\, 10 = 20$
    - $t_2 = 2 \,.\, 20 = 40$
      - $t_1 = 2 \,.\, 40 = 80$
      - $t_1 = \dfrac{40 - 1}{3} = 13$
    - $t_2 = \dfrac{20 - 1}{3} \notin \mathbb{N}$
  - $t_3 = \dfrac{10 - 1}{3} = 3$
    - $t_2 = 2 \,.\, 3 = 6$
      - $t_1 = 2 \,.\, 6 = 12$
      - $t_1 = \dfrac{6 - 1}{3} \notin \mathbb{N}$
    - $t_2 = \dfrac{3 - 1}{3} \notin \mathbb{N}$

Portanto, t_1 pode assumir os valores 12, 13 e 80.

c) Se $t_1 = 26$, temos a sequência:

$$\underbrace{26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8}_{\text{8 termos}}, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots, t_{2022}$$

Como 2022 – 8 = 2014 e

$$\begin{array}{r|l} 2014 & 3 \\ \hline 1 & 671 \text{ grupos de 4,2 e 1} \end{array}$$

$\longrightarrow t_{2022} = 4$

Portanto, $t_{2022} = 4$.

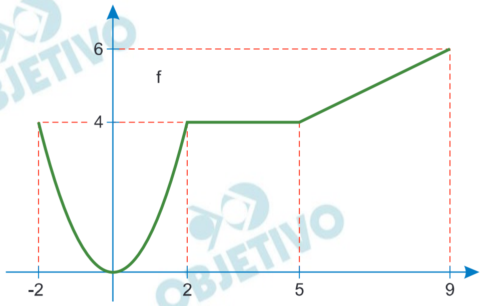
Respostas: a) 17

b) 12; 13 e 80

c) 4

M.02

Uma função f está definida no intervalo $[-2, 9]$ da seguinte forma: para $x \in [-2\ ,\ 2]$, f leva x em x^2 e, no restante do domínio, o seu gráfico é formado por dois segmentos de reta conforme mostra a figura.



a) Apresente todos os intervalos do domínio da função f nos quais ela é crescente.

b) Determine os valores de f nos pontos

$$x = -\frac{3}{2}\ ,\ x = \frac{7}{2}\ \text{ e } x = 8.$$

c) Para cada valor de $x \in \,]0\ ,\ 9[$, considere o retângulo R_x com vértices nos pontos $A = (x\ ,\ 0)$, $B = (9\ ,\ 0)$, $C = (9\ ,\ f(x))$ e $D = (x, f(x))$. Escreva a expressão da área de R_x, em função de x, para x no intervalo $]0\ ,\ 9[$.

Resolução

a) A função é crescente para todos os intervalos que são subconjuntos do intervalo [0; 9] e *estritamente crescente* para todos os intervalos que são subconjuntos dos intervalos [0; 2] e [5; 9].

b) A partir do gráfico, temos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } -2 \le x \le 2 \\ 4, \text{ se } 2 \le x \le 5 \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}, \text{ se } 5 \le x \le 9 \end{cases}$$

Observação:

A reta que passa pelos pontos (5, 4) e (9, 6) tem equação $y - 4 = \dfrac{6-4}{9-5} \cdot (x-5) \Leftrightarrow$

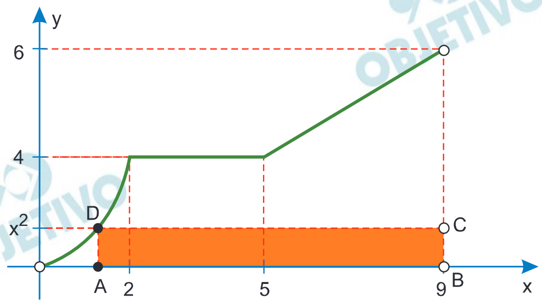
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

e assim, $f\left(\dfrac{-3}{2}\right) = \left(\dfrac{-3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$, $f\left(\dfrac{7}{2}\right) = 4$ **e**

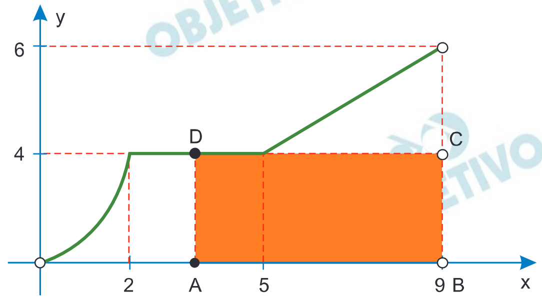
$$f(8) = \frac{1}{2} \cdot 8 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$$

c) A partir do enunciado e gráfico, e do ponto A(x; 0) temos:

1) Para $x \in \left]0, 2\right] \Rightarrow R_x = (9 - x) \cdot x^2$

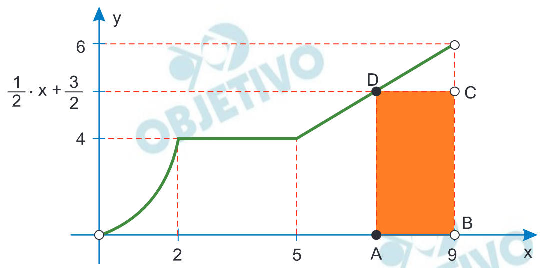


2) Para $x \in [2, 5] \Rightarrow R_x = (9 - x) \cdot 4$



3) Para

$$x \in \left[5, 9\right[\Rightarrow R_x = (9 - x) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}\right)$$



4) Assim, concluímos que

$$R_x = \begin{cases} (9 - x)\, x^2, \text{ se } 0 < x \leq 2 \\ (9 - x) \cdot 4, \text{ se } 2 \leq x \leq 5 \\ (9 - x) \cdot \left(\dfrac{1}{2} x + \dfrac{3}{2}\right), \text{ se } 5 \leq x < 9 \end{cases}$$

Respostas: a) A função é crescente para todos os intervalos que são subconjuntos do intervalo [0; 9] e *estritamente crescente* para todos os intervalos que são subconjuntos dos intervalos [0; 2] e [5; 9].

b) $\dfrac{9}{4}$; 4 e $\dfrac{11}{2}$

c) $R_x = \begin{cases} (9 - x)\, x^2, \text{ se } 0 < x \leq 2 \\ (9 - x) \cdot 4, \text{ se } 2 \leq x \leq 5 \\ (9 - x) \cdot \left(\dfrac{1}{2} x + \dfrac{3}{2}\right), \text{ se } 5 \leq x < 9 \end{cases}$

M.03

Considere o conjunto C de pontos do plano cartesiano da forma (m, n), com m e n pertencentes a {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

a) Apresente todos os pontos (m, n) de C para os quais o produto m . n é maior do que 60.

b) Sorteando-se um ponto (m, n) de C, com iguais probabilidades para todos os pontos, qual é a probabilidade de que a fração $\frac{m}{n}$ e seja **redutível**?

c) Sorteando-se, com iguais probabilidades, **dois pontos distintos** de C, qual é a probabilidade de que a distância entre eles seja igual a $\sqrt{13}$?

> **Note e Adote:**
>
> Uma fração $\frac{m}{n}$ é redutível quando m e n possuem um divisor natural em comum, além do 1.

Resolução

Seja C = {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

a) Os pares ordenados (m, n), com <u>m</u> e <u>n</u> pertencentes a C, tais que m . n > 60 são os <u>6</u> abaixo apresentados: (7, 9); (9, 7); (8, 8); (8, 9); (9, 8); (9, 9).

b) O conjunto de todos os pares ordenados (m, n) com <u>m</u> e <u>n</u> pertencentes a C é 7 . 7 = 49.

Os pares ordenados para os quais a fração $\frac{m}{n}$ é <u>redutível</u> são aqueles para os quais mdc (m, n) ≠ 1

e são os <u>19</u> pares descritos abaixo:

(3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6); (7, 7); (8, 8); (9, 9)
(3, 6); (6, 3); (3, 9); (9, 3); (6, 9); (9, 6)
(4, 6); (6, 4); (4, 8); (8, 4); (6, 8); (8, 6)

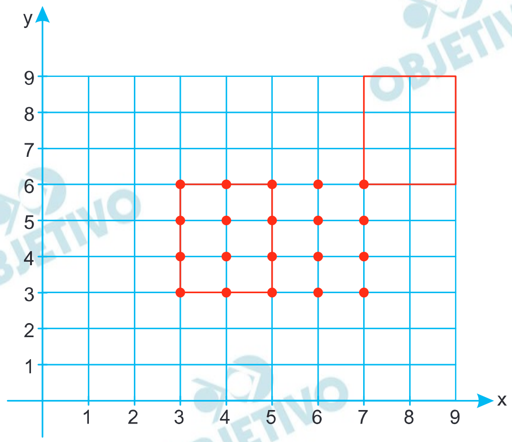
A probabilidade pedida é, pois, $\frac{19}{49}$

c) Dos 49 pontos possíveis, existem

$C_{49,2} = \frac{49 . 48}{2} = 1176$ casos possíveis.

Como m e n são inteiros, $\sqrt{13}$ só pode ser obtida como $\sqrt{2^2 + 3^2}$, o que indica que $\sqrt{13}$ deve ser a diagonal de um retângulo de lados de medidas 2 e 3. Escolhendo um ponto para ser o primeiro vértice do retângulo, os outros vértices estarão definidos no caso em que 2 é o lado horizontal e

3 o lado vertical, como mostram os casos abaixo.



Os valores de x do primeiro ponto variam de 3 a 7 e os valores de y variam de 3 a 6.

Portanto, existem 5.4 = 20 possibilidades de escolha para o primeiro vértice (pontos destacados em vermelho) do retângulo, cada um deles com 2 diagonais. Portanto 40 casos em que o retângulo tem lado 2 na horizontal e 3 na vertical. Para o caso em que o lado 3 está na horizontal e 2 na vertical, também haverão 40 casos de maneira análoga. Logo, existem 80 casos favoráveis. A probabilidade pedida é:

$$P = \frac{80}{1176} = \frac{10}{147}$$

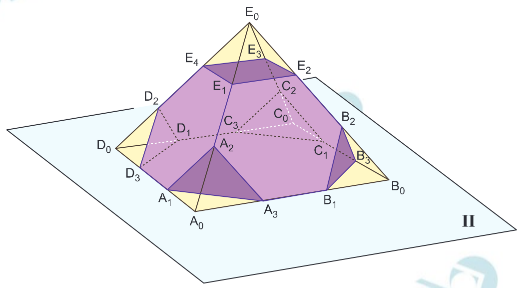
Resposta: a) (7, 9); (9, 7); (8, 8); (8, 9); (9, 8); (9, 9)

b) $\frac{19}{49}$

c) $P = \frac{80}{1176} = \frac{10}{147}$

M.04

Uma pirâmide P tem base quadrada $A_0B_0C_0D_0$ de lado medindo 1u . m apoiada em um plano Π, e quatro faces que são triângulos equiláteros, ligando a base ao ápice E_0 de de P. Os dezesseis pontos $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3, E_1, E_2, E_3$ e E_4, indicados na figura, dividem cada aresta da pirâmide em três segmentos de igual medida.



Um novo sólido **S**, em destaque na figura, é produzido subtraindo-se de **P** as cinco pirâmides $A_0A_1A_2A_3$, $B_0B_1B_2B_3$, $C_0C_1C_2C_3$, $D_0D_1D_2D_3$, $E_0E_1E_2E_3E_4$. Determine:

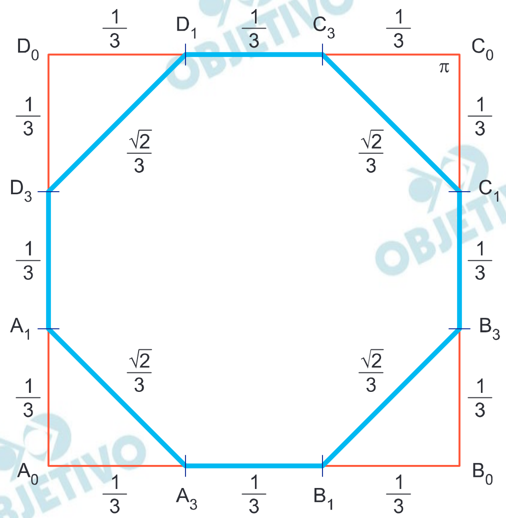
a) o perímetro da face de **S** que se apoia em Π, cujos vértices são $A_1, A_3, B_1, B_3, C_1, C_3, D_1$ e D_3.

b) o volume de **S**.

c) a distância entre A_1 e E_2.

Resolução

a)



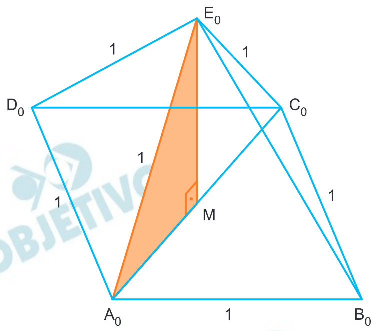
$$A_1A_3 = B_1B_3 = C_1C_3 = D_1D_3 =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

perímetro da face $A_1A_3B_1B_3C_1C_3D_1D_3 =$

$$= 4 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{3}(1 + \sqrt{2})$$

b) (1)Pirâmide $A_0B_0C_0D_0E_0$



Sendo M o ponto médio da diagonal A_0C_0:

$$A_0M = \frac{A_0C_0}{2} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por Pitágoras no triângulo A_0ME_0:

$$(A_0E_0)^2 = (A_0M)^2 + (ME_0)^2$$

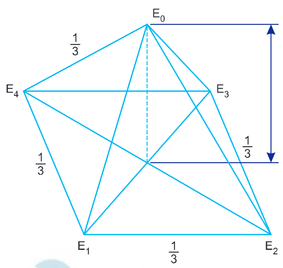
$$\Rightarrow 1^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (ME_0)^2$$

$$\Rightarrow ME_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

O volume desta pirâmide é:

$$V_{A_0B_0C_0D_0E_0} = \frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

(2) Pirâmide $E_0E_1E_2E_3E_4$

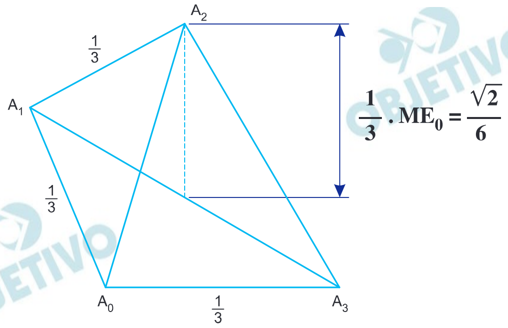


$$\frac{1}{3} \cdot ME_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

O volume desta pirâmide é:

$$VE_0E_1E_2E_3E_4 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{162}$$

(3)



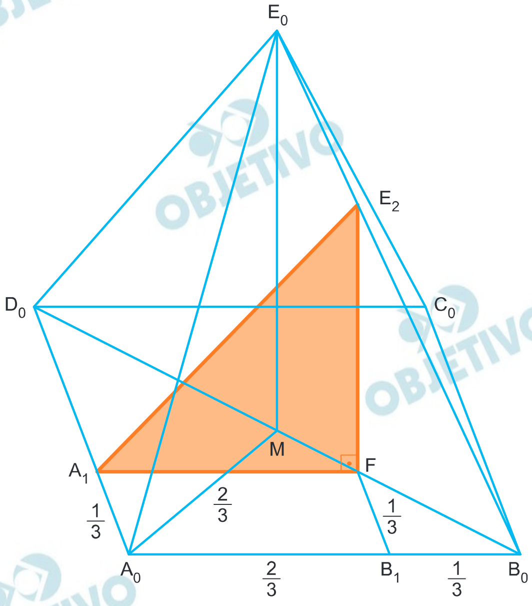
$$V_{A_0A_1A_2A_3} = V_{B_0B_1B_2B_3} = V_{C_0C_1C_2C_3} =$$

$$= V_{D_0D_1D_2D_3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{324}$$

(4) $V_S = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{162} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{324} =$

$$= \frac{27 - 1 - 2}{162} \cdot \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{27}$$

c)



(1) F: projeção de E_2 no plano Π $(A_0B_0C_0D_0)$:

(2) $E_2F = \frac{2}{3}\ ME_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}$

(3) Por Pitágoras no $\Delta A_1\, F\, E_2$

$$(A_1E_2)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$$

$$(A_1E_2)^2 = \frac{6}{9}$$

$$A_1E_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Respostas: a) $\frac{4}{3}(1 + \sqrt{2})$

b) $\frac{4\sqrt{2}}{27}$

c) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

M.05

Considere, no plano cartesiano, a circunferência com centro no ponto (0, 3) e com raio 2 e, para cada $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, a parábola cuja equação é $y = ax^2 + 1$.

a) Para $a = -1$, encontre o ponto comum entre a circunferência e a parábola.

b) Para $a = 1$, apresente 3 pontos em comum entre a circunferência e a parábola.

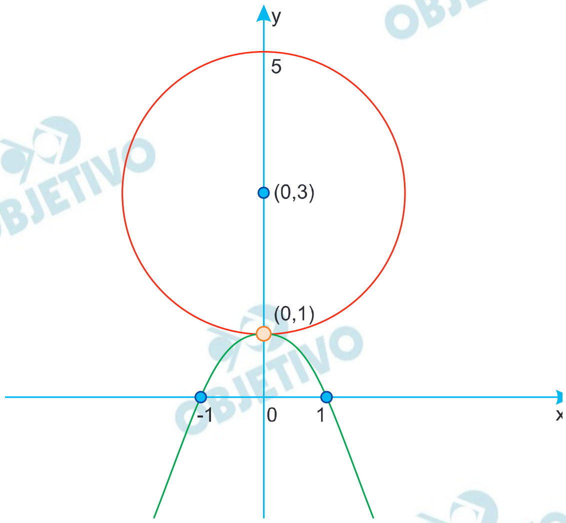
c) Encontre todos os valores de a para os quais a circunferência e a parábola possuam exatamente 3 pontos em comum.

Resolução

A equação da circunferência com centro no ponto (0; 3) e raio 2 é

$$x^2 + (y - 3)^2 = 4$$

a) Para $a = -1$ o ponto comum entre a circunferência e a parábola de equação $y = -x^2 + 1$ é (0; 1), pois



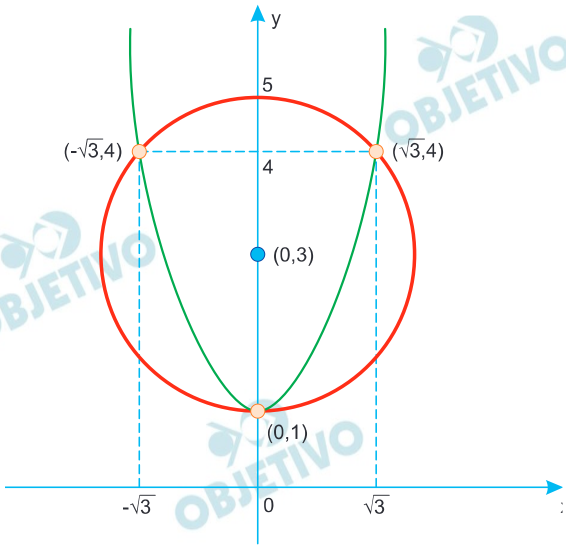
b) Para $a = 1$, os pontos em comum entre a circunferência e a parábola de equação $y = x^2 + 1$ são tais que:

$$\begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = 4 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (x^2 - 2)^2 = 4 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 3x^2 = 0 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \,.\, (x^2 - 3) = 0 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \text{ ou } x^2 = 3 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{3} \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (0; 1), (-\sqrt{3}; 4), (\sqrt{3}; 4)$$



c) **Os pontos em comum entre a circunferência de equação $x^2 + (y - 3)^2 = 4$ e a parábola de equação $y = ax^2 + 1$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ são tais que:**

$x^2 + (ax^2 - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow a^2x^4 + (1 - 4a) \,.\, x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 \,.\, (a^2 \,.\, x^2 + 1 - 4a) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 0$ ou $a^2 \,.\, x^2 = 4a - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pm \dfrac{\sqrt{4a - 1}}{a}$

Para termos exatamente 3 pontos em comum,

devemos ter $4a - 1 > 0 \Leftrightarrow a > \dfrac{1}{4}$

Respostas: a) (0; 1)

b) $(-\sqrt{3}; 4)$, (0; 1), $(\sqrt{3}; 4)$

c) $a > \dfrac{1}{4}$

M.06

Uma empresa distribuidora de alimentos tem latas de ervilha (E) e latas de milho (M), em dois pesos, 1kg e 2kg, totalizando 4 (quatro) tipos de latas: E1 e E2 (ervilha, em pesos de 1kg e 2kg, respectivamente) e M1 e M2 (milho, em pesos de 1kg e 2kg, respectivamente). Essas latas são agrupadas em pacotes para envio aos comerciantes. Dois pacotes de latas são considerados **iguais** se contiverem a mesma quantidade de latas de cada tipo, independentemente da maneira como são organizadas no pacote.

a) Quantos pacotes diferentes pesando, cada um, exatamente 200kg (**duzentos quilos**) podem ser montados usando-se apenas latas dos tipos **E1 e E2**? Na contagem, deve-se também levar em conta pacotes formados por apenas **1** tipo dessas latas.

b) Quantos pacotes diferentes pesando, cada um, exatamente 200kg (**duzentos quilos**) podem ser montados usando-se apenas latas dos tipos **E1, E2 e M1**? Na contagem, deve-se também levar em conta pacotes formados por apenas **1 ou 2** tipos dessas latas.

c) Quantos pacotes diferentes pesando, cada um, exatamente 20kg (**vinte quilos**) podem ser montados usando-se latas dos tipos **E1, E2, M1 e M2**? Na contagem, deve-se também levar em conta pacotes formados por apenas **1, 2 ou 3** tipos dessas latas.

Resolução

a) **A partir das informações do enunciado, podemos montar a seguinte equação:**

$1 \,.\, E1 + 2 \,.\, E2 = 200$

$E1 = 2 \,.\, (100 - E2)$

Como E1 e E2 são não negativos, temos:

$$\begin{cases} E2 \geq 0 \\ 100 - E2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E2 \geq 0 \\ 100 \geq E2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq E2 \leq 100$$

Como E2 é inteiro, existem 101 opções para E2. Para cada valor de E2, há somente uma opção para E1.
Portanto, há 101 . 1 = 101 maneiras.

b) **A partir das informações do enunciado, podemos montar a seguinte equação:**

$1 \,.\, E1 + 2 \,.\, E2 + 1 \,.\, M1 = 200$

$E1 + M1 = 2 \,.\, (100 - E2).$

Do item anterior, sabemos que: $0 \leq E2 \leq 100$.

Assim, podemos montar a seguinte tabela:

E2	E1 + M1	Número de maneiras
0	200	201
1	198	199
2	196	197
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
99	2	3
100	0	1

P.A.

Assim, o total de maneiras é 1 + 3 + … + 199 + 201
Portanto, a soma da P.A. é:

$$\left(\frac{1 + 201}{2}\right) . 101 = 101^2 = 10201 \text{ maneiras}$$

c) A partir das informações do texto, podemos montar a seguinte equação.

$1 . E_1 + 2 . E2 + 1 . M1 + 2 . M2 = 20$

$E1 + M1 = 2 . [10 - (E2 + M2)]$

A soma E2 + M2 varia num intervalo de 0 a 10.
Assim, podemos montar a seguinte tabela:

E2 + M2	Número de possibilidades (E2 + M2)	E1 + M1	Número de possibilidades (E1 + M1)
0	1	20	21
1	2	18	19
2	3	16	17
3	4	14	15
4	5	12	13
5	6	10	11
6	7	8	9
7	8	6	7
8	9	4	5
9	10	2	3
10	11	0	1

Portanto, o total de possibilidades é

$1.21 + 2.19 + 3.17 + 4.15 + 5.13 + 6.11 + 7.9 +$
$+ 8.7 + 9.5 + 10.3 + 11.1 = 506$ **possibilidades**

Respostas: a) 101 maneiras.
b) 10201 maneiras
c) 506 possibilidades