5

Um fabricante de produtos de beleza está modificando as dimensões da embalagem de seu principal produto, o shampoo antipiolhos chamado 100πolho. Atualmente, as embalagens têm o formato de um paralelepípedo com 18 cm de altura e com base retangular de dimensões 2 cm x 3 cm.

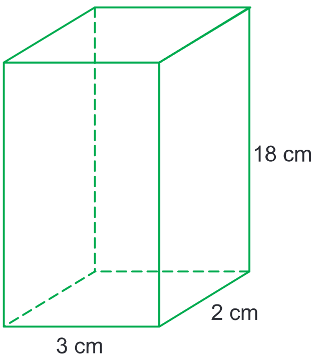
São utilizados dois tipos de materiais para construir a embalagem. O material utilizado tanto para a base quanto para a lateral é mais simples e custa R$ 10,00 o metro quadrado. O material utilizado para a tampa custa R$ 40,00 o metro quadrado, por ser mais resistente.

a) Qual o custo atual do material para construir 100 embalagens?

b) Por questões logísticas, as novas embalagens devem ter o formato de um paralelepípedo com base quadrada e com altura de 12 cm, e precisam ter a mesma capacidade volumétrica que as embalagens atuais. Quais as dimensões da nova embalagem e o custo de produção de 100 delas, considerando os mesmos materiais para produção?

Resolução

a) Embalagem atual

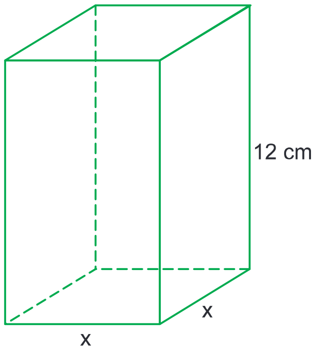


I) A soma da área da base com a área lateral é
(3 cm) . (2 cm) + [(2 . (3 cm) . (18 cm) + + 2 . (2 cm) . (18 cm)] = 186 cm² = = 0,0186 m²

II) A área da tampa é
(3 cm) . (2 cm) = 6 cm² = 0,0006 m²

Assim, o custo atual, em reais, para produzir 100 embalagens é
100 . 0,0186 . 10 + 100 . 0,0006 . 40 =
= 18,6 + 2,4 = 21

b) Nova embalagem



I) Como o volume, em cm³, da nova embalagem será igual ao volume da embalagem atual, temos:
$x \cdot x \cdot 12 = 3 \cdot 2 \cdot 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ cm

II) A soma da área da base com a área lateral da nova embalagem será
$(3\text{ cm})^2 + 4 \cdot (3\text{ cm}) \cdot (12\text{ cm}) =$
$= 9\text{ cm}^2 + 144\text{ cm}^2 = 153\text{ cm}^2 = 0{,}0153\text{ m}^2$

III) A área da tampa da nova embalagem será
$(3\text{ cm})^2 = 9\text{ cm}^2 = 0{,}0009\text{ m}^2$

Assim, o custo, em reais, para produzir 100 novas embalagens é 100 . 0,0153 . 10 + 100 . 0,0009 . 40 = = 15,3 + 3,6 = 18,9

Respostas: a) O custo do material é R$ 21,00.
b) As dimensões são 3cmx3cmx12cm e o custo de produção é R$ 18,90.

6

Márcia está fazendo um teste de condicionamento físico e corre numa pista circular de 200 m de comprimento, com velocidade angular constante, e no sentido anti-horário. A distância, em metros, entre Márcia e um equipamento eletrônico localizado na parte externa da pista foi registrada nos primeiros 60 segundos e está representada na Figura 1 abaixo.

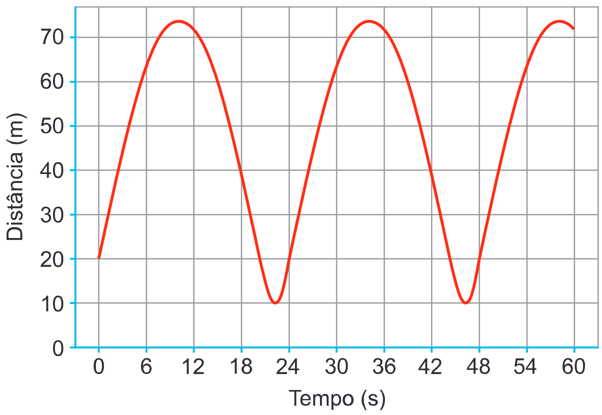


Figura 1: Distância, em função do tempo, entre Márcia e o equipamento eletrônico.

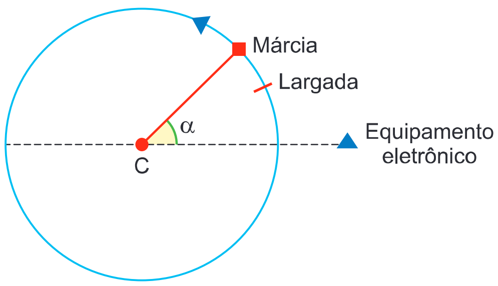


Figura 2: Representação da situação considerada no item (b).

a) Determine quanto tempo Márcia demora para completar uma volta e quantos metros ela percorreu nos primeiros 60 segundos.

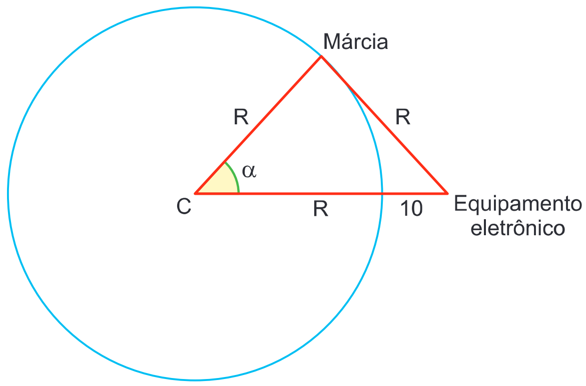
b) A Figura 2 representa um determinado instante em que a distância entre Márcia e o centro da pista (ponto C) é igual à distância entre ela e o equipamento eletrônico. Calcule o cosseno do ângulo α indicado na Figura 2.

Resolução

a) Do gráfico, temos que Márcia completa uma volta em 24s.
Como a pista tem comprimento C = 200 m, ela percorre nos primeiros 60s uma distância Δs, sendo

$$\frac{\Delta s}{60} = \frac{200}{24} \Rightarrow \Delta s = 500 \text{ m}$$

b) Da figura 2, podemos representar que no instante considerado, temos:



Pela lei dos cossenos:

$$\cancel{R^2} = \cancel{R^2} + (R + 10)^2 - 2 \,.\, R \,.\, (R + 10) \,.\, \cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2R(R + 10) \,.\, \cos\alpha = (R + 10)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{R + 10}{2R}$$

Como C = 200 m ⇔ 2πR = 200, então $R = \frac{100}{\pi}$ **e**

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{100}{\pi} + 10}{2 \,.\, \dfrac{100}{\pi}} = \frac{100 + 10\pi}{200} = \frac{10 + \pi}{20}$$

Respostas: a) 24s e 500m

b) $\cos\alpha = \dfrac{10 + \pi}{20}$

7

Heloísa está brincando com uma urna que contém dez bolinhas, sendo três azuis, três verdes e quatro rosas. Ela resolve construir uma sequência numérica $x_0, x_1, x_2, \dots$ de acordo com as cores das bolinhas que sorteia da urna. O primeiro termo da sequência é $x_0 = 1$.

A cada sorteio, um novo termo da sequência é determinado multiplicando-se o termo anterior:

- por 2, se a bolinha sorteada for azul;
- por 3, se a bolinha sorteada for verde;
- por 5, se a bolinha sorteada for rosa.

A bolinha sorteada é devolvida para a urna antes do próximo sorteio. Por exemplo, se nos três primeiros sorteios Heloísa retira, respectivamente, uma bolinha rosa, uma verde e uma azul, então a sequência obtida é

- $x_0 = 1$,
- $x_1 = 5 \,.\, x_0 = 5$,
- $x_2 = 3 \,.\, x_1 = 15$,
- $x_3 = 2 \,.\, x_2 = 30$.

a) É possível que Heloísa obtenha uma sequência contendo o termo 189? Justifique.

b) Qual a probabilidade de Heloísa obter o número 360 como termo de uma sequência?

Resolução

a) 1) $189 = 3^2 \,.\, 7 = 1 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 7$

2) Não é possível obter uma sequência com um dos termos igual a 189 pois nenhuma bolinha "vale 7".

b) 1) Decompondo 360 em fatores primos obtemos $360 = 2^3 \,.\, 3^2 \,.\, 5$

2) $2^3 \,.\, 3^2 \,.\, 5 = 1 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5$

3) Na sequência $(x_0, x_1, x_2, \dots, 360)$, o 360 é o $x_6 = 1 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5$

4) Representando por A a bolinha azul, V a bolinha verde e R a bolinha Rosa, uma maneira de obter o 360 é obter, nas 6 primeiras extrações, o evento A, A, A, V, V, R, nesta ordem.

5) A probabilidade de obter esse evento é

$$\left(\frac{3}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \frac{4}{10} = \frac{3^5 \,.\, 4}{10^6}$$

6) O número de eventos distintos, todos com a mesma probabilidade, de se obter o número 360 é $P_6^{3,2} = \dfrac{6!}{3!\,2!} = \dfrac{6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3!}{3!\,2!} = 60$

A, A, A, V, V, R
A, A, V, V, A, R
V, V, A, R, A, A
⋮
etc

7) A probabilidade pedida é, pois,

$$60 \,.\, \frac{3^5 \,.\, 4}{10^6} = 0{,}05832 = 5{,}832\%$$

Respostas: a) Não
b) 5,832%

8

Por volta de 1845, o matemático belga Pierre Verhulst começou a estudar um tipo de função que hoje é conhecida como função logística. Originalmente utilizada para modelar problemas envolvendo crescimento populacional, atualmente tem muitas outras aplicações em ecologia, biomatemática, sociologia e ciências políticas.

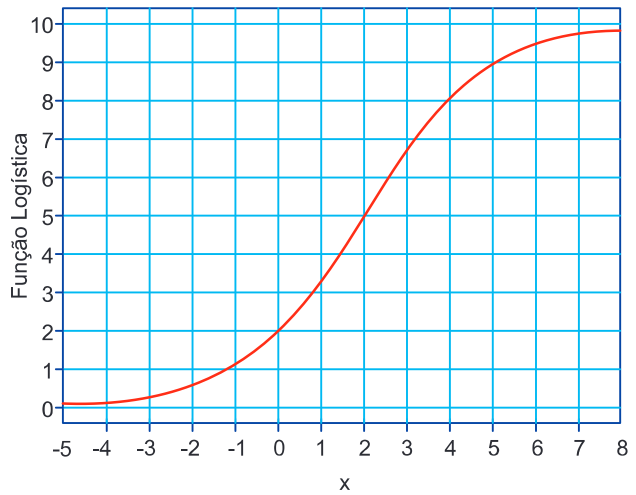
Uma função logística pode ser definida por

$$f(x) = \frac{L}{1 + 2^{-k(x - x_0)}}, \; x \in \mathbb{R},$$

em que $k > 0$, $L > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}$.

a) Seja f^{-1} a função inversa de f. Determine a expressão e o domínio de f^{-1}.

b) O gráfico abaixo é de uma função logística com $L = 10$. Determine os valores de x_0 e k.



Resolução

a) **Dada a função** $f(x) = \dfrac{L}{1 + 2^{-k(x - x_0)}}$**, obtendo sua inversa, temos:**

$$y = \frac{L}{1 + 2^{-k(x - x_0)}}$$

Trocando as variáveis, temos:

$$x = \frac{L}{1 + 2^{-k(y - x_0)}} \Leftrightarrow 1 + 2^{-k(y - x_0)} = \frac{L}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{-k(y - x_0)} = \frac{L}{x} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -k(y - x_0) = \log_2\left(\frac{L}{x} - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -ky + kx_0 = \log_2\left(\frac{L}{x} - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ky = kx_0 - \log_2\left(\frac{L}{x} - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; y = \frac{kx_0 - \log_2\left(\dfrac{L}{x} - 1\right)}{k}$$

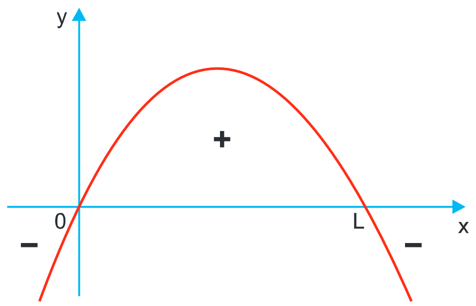
e assim, tem-se

$$f^{-1}(x) = \frac{kx_0 - \log_2\left(\dfrac{L}{x} - 1\right)}{k}$$

O domínio de f^{-1} são os valores que satisfazem a condição de existência do logaritmo. Assim, temos:

$$\frac{L}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{L - x}{x} > 0 \Leftrightarrow x \,.\, (L - x) > 0$$

Resolvendo a inequação, temos:



$$D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < L\}$$

b) **Pelo gráfico da função f, temos os seguintes pontos: (0; 2) e (4; 8). Assim, $f^{-1}(2) = 0$ e $f^{-1}(8) = 4$.**

Substituindo na função inversa, temos:

$$f^{-1}(2) = \frac{k \,.\, x_0 - \log_2\left(\dfrac{10}{2} - 1\right)}{k} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k \,.\, x_0 - \log_2 4 = 0 \Leftrightarrow k \,.\, x_0 = 2 \qquad \text{(I)}$$

$$f^{-1}(8) = \frac{k \,.\, x_0 - \log_2\left(\dfrac{10}{8} - 1\right)}{k} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k \,.\, x_0 - \log_2 (1/4) = 4k \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$2 - (-2) = 4k \Leftrightarrow k = 1$$

Em (I), temos: $1 \,.\, x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 2$

Respostas: a) $f^{-1}(x) = \dfrac{k \,.\, x_0 - \log_2\left(\dfrac{L}{x} - 1\right)}{k}$

$D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < L\}$

b) $k = 1$ e $x_0 = 2$

9

Seja a um número real e considere o polinômio $f(x) = x^3 + (a+1)x^2 + (a+2)x + 2$, que tem $x = -1$ como uma de suas raízes.

a) Determine todos os valores de a tais que $x = -1$ é a única raiz real.

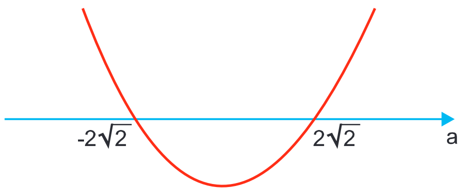
b) Determine todos os valores de a tais que as soluções de $f(x) = 0$ sejam números inteiros.

Resolução

O polinômio f(x) é divisível por x + 1, e assim $f(x) = (x+1)(x^2 + ax + 2)$, a partir da divisão a seguir

1	a + 1	a + 2	2	–1
1	a	2	0	

a) **Para que $x = -1$ seja a única raiz real, devemos ter $a^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 2 < 0 \Leftrightarrow a^2 - 8 < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$, onde o gráfico de $f(a) = a^2 - 8$ é do tipo**



b) **O conjunto solução de $x^3 + (a+1)x^2 + (a+2)x + 2 = 0$ é $\{-1; x_2; x_3\}$ e a partir das relações de Girard, tem-se**

$$\begin{cases} -1 + x_2 + x_3 = -a - 1 \\ -1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = -a \\ x_2 \,.\, x_3 = 2 \end{cases}$$

Se todas as raízes de f(x) são inteiras, então $-a = 1 + 2$ ou $-a = -1 - 2 \Leftrightarrow a = -3$ ou $a = 3$.

Respostas: a) $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$

b) -3 ou 3

10

Seja K a região poligonal, no plano cartesiano, dos pontos (x, y) que satisfazem as inequações

$$x \geq 0,$$
$$y \geq 0,$$
$$x + y \leq 3,$$
$$3x + y \leq 5.$$

A área hachurada da figura abaixo representa a região K no plano cartesiano.

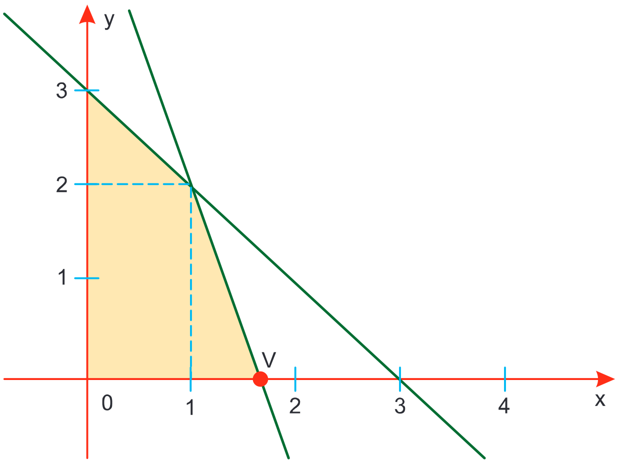


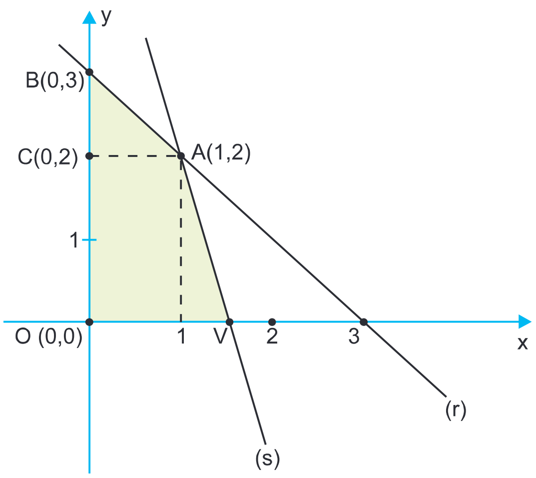
Figura 1: representação da região K.

a) Determine as coordenadas do vértice V, indicado na Figura 1, e a área da região K.

b) Determine o maior valor de 2x + y para (x, y) ∈ K.

Resolução

a) Seja x + y = 3 e 3x + y = 5 as equações das retas (r) e (s), respectivamente.



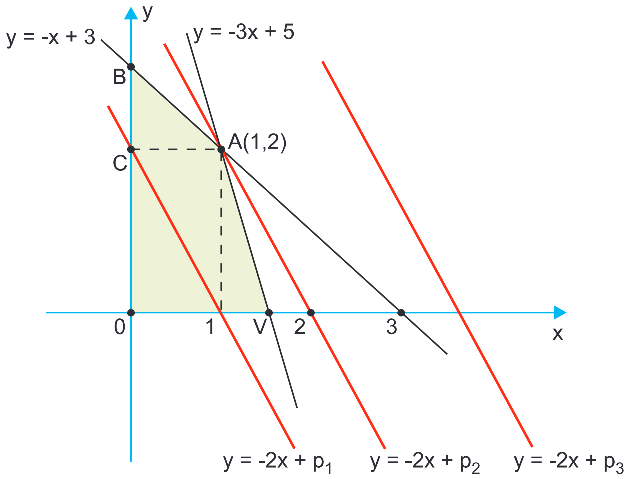
O ponto V(v; 0) ∈ (s) e, portanto,

$$\mathbf{3 \cdot v + 0 = 5 \Rightarrow v = \frac{5}{3}}$$

A área S da região poligonal K é igual a soma das áreas do triângulo ABC e do trapézio ACOV. Logo:

$$\mathbf{S = \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{\left(\frac{5}{3} + 1\right) \cdot 2}{2} = \frac{19}{6}}$$

b) Seja y = – 2x + p um feixe de retas paralelas com coeficiente angular – 2.



Para que (x; y) ∈ K, a reta y = – 2x + p deve conter o ponto A(1; 2) e, portanto, 2 = – 2 . 1 + p ⇔ p = 4. Logo, o maior valor de 2x + y é igual a 4.

Respostas: a) $\mathbf{V\left(\frac{5}{3}; 0\right)}$ **e área =** $\mathbf{\frac{19}{6}}$

b) 4